数学机械化丛书

6

可积系统与计算机代数

范恩贵 著



科学出版社

www.sciencep.com

(O-1933.0101)

数学机械化丛书

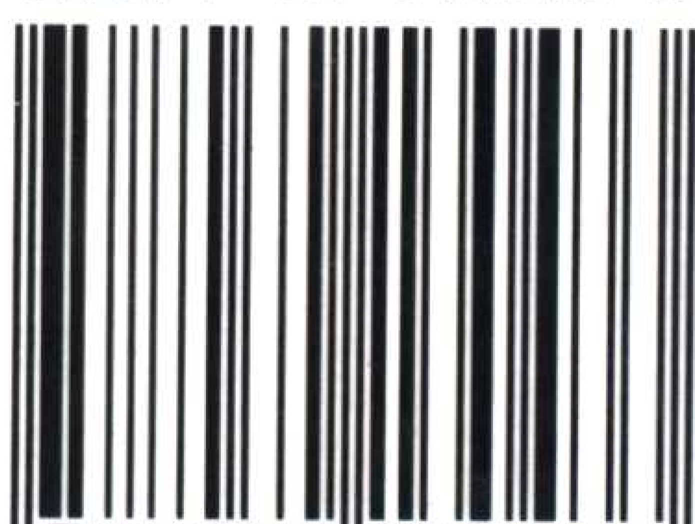
1	数学机械化	2003.3	吴文俊 著
2	消去法及其应用	2002.8	王东明 著
3	实域论	2003.12	曾广兴 著
4	多项式系统的实根分离算法及其应用	2004.5	陆征一 等 著
5	近世计算理论导引	2004.6	黄文奇 等 著
6	可积系统与计算机代数	2004.6	范恩贵 著

*　*　*　*　*

拟出版书目

- 几何定理机器证明的几何不变量方法　　张景中、高小山、周咸青
- 组合恒等式的机器证明　　陈永川
- 几何自动作图与智能CAD　　高小山
- 代数曲面造型　　陈发来 等
- 非线性数学物理方程的行波解　　李志斌 等

ISBN 7-03-013043-X



ISBN 7-03-013043-X
定 价： 32.00 元

数学机械化丛书　6

可积系统与计算机代数

范恩贵　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书介绍了作者在孤立子和可积系统方面的部分研究成果以及吴方法和符号运算在该领域的应用. 全书共分五章, 第一章给出了构造非线性发展方程多种形式行波解的两种直接而统一的算法, 并在计算机代数系统中实现; 第二章提出了利用齐次平衡法寻求非线性偏微分方程 Backlund 变换和相似解的两个新的应用; 在第三章, 直接从谱问题出发并利用泛函梯度, 发展了生成非线性发展方程族及构造其零曲率表示的一般方法; 在第四章, 从一新的谱问题出发导出了一族覆盖多种著名方程的发展方程族, 并证明了该方程族 Liouville 可积并拥有多 Hamilton 结构. 第五章研究了微分方程及 q-差分方程的 Darboux 变换和孤子解.

本书可作为数学或物理专业的高年级大学生和研究生教材, 也可供专业研究人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

可积系统与计算机代数/范恩贵著. -北京: 科学出版社, 2004
(数学机械化丛书; 6)
ISBN 7-03-013043-X

Ⅰ. 可… Ⅱ. 范… Ⅲ. ①偏微分方程—解析解②电子计算机—数值计算 Ⅳ. ①O175.2 ②TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 024150 号

责任编辑: 吕 虹 张 扬 / 责任校对: 柏连海 包志虹
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004年6月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2004年6月第一次印刷 印张: 12 1/4
印数: 1—2 500 字数: 200 000

定价: 32.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈新欣〉)

《数学机械化丛书》获国家基础研究发展规划项目“数学机械化与自动推理平台”与“数学机械化应用推广专项经费”资助

《数学机械化丛书》前言 [①]

十六七世纪以来，人类历史上经历了一场史无前例的技术革命，出现了各种类型的机器，取代各种形式的体力劳动，使人类进入一个新时代. 几百年后的今天，电子计算机已可以有条件地代替一部分特定的脑力劳动，因而人类面临另一场更宏伟的技术革命，处在又一个新时代的前夕. 数学是一种典型的脑力劳动，它在这一场新的技术革命中，无疑地将扮演一个重要的角色. 为了了解数学在当前这场革命中所扮演的角色，应对机器的作用，以及作为数学的脑力劳动的方式，进行一定的分析.

1. 什么是数学的机械化

不论是机器代替体力劳动，或是计算机代替某种脑力劳动，其所以成为可能，关键在于所需代替的劳动已经"机械化"，也就是说已实现了刻板化或规格化. 正因为割麦、刈草、纺纱、织布的动作已经是机械化刻板化了的，因而可据此造出割麦机、刈草机、纺纱机、织布机来. 也正因为加减乘除开方等运算这一类脑力劳动，几千年来就已经是机械地刻板地进行的，才有可能使得 17 世纪的法国数学家帕斯卡，利用齿轮传动造出了第一台机械计算机 —— 加法机，并由莱布尼茨改进成为也能进行乘法的机器. 数学问题的机械化，就要求在运算或证明过程中，每前进一步之后，都有一个确定的、必须选择的下一步，这样沿着一条有规律的、刻板的道路，一直达到结论.

在中小学数学的范围里，就有着不少已经机械化了的课题. 除了四则、开方等运算外，解线性联立方程组就是一个很好的例子. 在中学用的数学课本中，往往介绍解线性方程组的各种"消去法"，其求解过程是一个按一定程序进行的计算过程，也就是一种机械的、刻板的过程. 根据这一过程编成程序，由电子计算机付诸实施，就可以不仅机器化而且达到自动化，在几分钟甚至几秒钟之内求出一个未知数多至上百个的线性方程组的解答来，这在手工计算几乎是不可能的. 如果用手工计算，即使是解只有三四个未知数的方程组，也将是繁琐而令人厌烦的. 现代化的国防、经济建设中，大量出现的例如网络一类的问题，

---

① 20 世纪七八十年代之交，我尝试用计算机证明几何定理取得成功，由此并提出了数学机械化的设想. 先后在一些通俗报告与写作中，解释数学机械化的意义与前景，例如 1978 年发表于《自然辩证法通讯》的"数学机械化问题"以及 1980 年发表于《百科知识》的"数学的机械化". 二文都重载于 1995 年由山东教育出版社出版的《吴文俊论数学机械化》一书. 经过 20 多年众多学者的努力，数学机械化在各个方面都取得了丰富多彩的成就，并已出版了多种专著，汇集成现在的数学机械化丛书. 现据 1980 年的《百科知识》的"数学的机械化"一文，稍加修改并作增补，以代丛书前言.

往往可归结为求解很多未知数的线性方程组. 这使得已经机械化了的线性方程解法在四个现代化中起着一种重要作用.

即使是不专门研究数学的人们, 也大都知道, 数学的脑力劳动有两种主要形式: 数值计算与定理证明 (或许还应包括公式推导, 但这终究是次要的). 著名的数理逻辑学家美国洛克菲勒大学教授王浩先生在一篇有名的 "向机械化数学前进" 的文章中, 曾列举了这两种数学脑力劳动的若干不同之点. 我们可以简略而概括地把它们对比一下:

计算	证明
易	难
繁	简
刻板	灵活
枯燥	美妙

计算, 如已经提到过的加减乘除开方与解线性方程组, 其所以虽繁而易, 根本原因正在于它已经机械化. 而证明的巧而难, 是大家都深有体会的, 其根本原因也正在于它并没有机械化. 例如, 我们在中学初等几何定理的证明中, 就经常要依靠诸如直观、洞察、经验以及其他一些模糊不清的原则, 去寻找捷径.

2. 从证明的机械化到机器证明

一个值得提出的问题是: 定理的证明是不是也能像计算那样机械化, 因而把巧而难的证明, 化为计算那样虽繁而易的劳动呢？事实上, 这一证明机械化的设想, 并不始自今日, 它早就为 17 世纪时的大哲学家、大思想家和大数学家笛卡儿和莱布尼茨所具有. 只是直到 19 世纪末, 希尔伯特 (德国数学家, 1862~1943) 等创立并发展了数理逻辑以来, 这一设想才有了明确的数学形式. 又由于 20 世纪 40 年代电子计算机的出现, 才使这一设想的实现有了现实可能性.

从上世纪二三十年代以来, 数理逻辑学家们对于定理证明机械化的可能性进行了大量的理论探讨, 他们的结果大都是否定的. 例如哥德尔 (Gödel) 等的一条著名定理就说, 即使看来最简单的初等数论这一范围, 它的定理证明的机械化也是不可能的. 另一方面, 1950 年波兰数学家塔斯基 (Tarski) 则证明了初等几何 (以及初等代数) 这一范围的定理证明, 却是可以机械化的. 只是塔斯基的结果近于例外, 在初等几何及初等代数以外的大量结果都是反面的, 即机械化是不可能的. 1956 年以来美国开始了利用电子计算机做证明定理的尝试. 1959 年王浩先生设计了一个机械化方法, 用计算机证明了罗素等著的《数学原理》这一经典著作中的几百条定理, 只用了 9 分钟, 在数学与数理逻辑学界引

起了轰动. 一时间, 机器证明的前景似乎非常乐观. 例如 1958 年时就有人曾经预测: 在 10 年之内计算机将发现并证明一个重要的数学新定理. 还有人认为, 如果这样, 则不仅许多著名哲学家与数学家, 如皮亚诺、怀特海、罗素、希尔伯特以及杜灵等人的梦想得以实现, 而且计算将成为科学的皇后, 人类的主人!

然而, 事情的发展却并不如预期那样美好. 尽管在 1976 年时, 美国的哈肯等人, 在高速计算机上用了 1200 小时的计算时间, 解决了数学家们 100 多年来所未能解决的一个著名难题 —— 四色问题, 因此而轰动一时, 但是, 这只能说明计算机作为定理证明的辅助工具有着巨大潜力, 还不能认为这样的证明就是一种真正的机器证明. 用王浩先生的说法, 哈肯等关于四色定理的证明是一种使用计算机的特例机证, 它只适用于四色这一特殊的定理, 这与所谓基础机器证明之能适用于一类定理者有别. 后者才真正体现了机械化定理证明, 进而实现机器证明的实质. 另一面, 在真正的机械化证明方面, 虽然塔斯基在理论上早已证明了初等几何的定理证明是能机械化的, 还提出了据以造判定机也即是证明机的设想, 但实际上他的机械化方法非常繁, 繁到不可收拾, 因而远远不是切实可行的. 1976 年时, 美国做了许多在计算机上证明定理的实验, 在塔斯基的初等几何范围内, 用计算机所能证明的只是一些近于同义反复的"儿戏式"的"定理". 因此, 有些专家曾经发出过这样悲观的论调: 如果专依靠机器, 则再过 100 年也未必能证明出多少有意义的新定理来.

3. 一条切实可行的道路

1976 年冬, 我们开始了定理证明机械化的研究. 1977 年春取得了初步成果, 证明初等几何主要一类定理的证明可以机械化. 在理论上说来, 我们的结果已包括在塔斯基的定理之中. 但与塔斯基的结果不同, 我们的机械化方法是切实可行的, 即使用手算, 依据机械化的方法逐步进行, 虽然繁复, 也可以证明一些艰深的定理.

我们的方法主要分两步, 第一步是引进坐标, 然后把需证定理中的假设与终结部分都用坐标间的代数关系来表示. 我们所考虑的定理局限于这些代数关系都是多项式等式关系的范围, 例如平行、垂直、相交、距离等关系都是如此. 这一步可以叫做几何的代数化. 第二步是通过代表假设的多项式关系把终结多项式中的坐标逐个消去, 如果消去的结果为零, 即表明定理正确, 否则再作进一步检查. 这一步完全是代数的, 即用多项式的消元法来验证.

上述两步都可以机械与刻板地进行. 根据我们的机械化方法编成程序, 以在计算机上实现机器证明, 并无实质上的困难. 事实上数学所某些同志以及国外的王浩先生都曾在计算机上试行过. 我们自己也曾在国产的长城 203 台式机上证明了像西摩松线那样不算简单的定理. 1978 年初我们又证明了初等微分

几何中主要的一类定理证明也可以机械化. 而且这种机械化方法也是切实可行的，并据此用手算证明了不算简单的一些定理.

从我们的工作中可以看出，定理的机械化证明，往往极度繁复，与通常既简且妙的证明形成对照，这种以量的复杂来换取质的困难，正是利用计算机所需要的.

在电子计算机如此发展的今天，把我们的机械化方法在计算机上实现不仅不难，而且有一台微型的台式机也就够了. 就像我们曾经使用过的长城 203, 它的存数最多只能到 234 个 10 进位的 12 位数，就已能用以证明西摩松线那样的定理. 随着超大规模集成电路与其他技术的出现与改进，微型机将愈来愈小型化而内存却愈来愈大，功能愈来愈多，自动化的程度也愈来愈高. 进入 21 世纪以后，这一类方便的小型机器将为广大群众普遍使用. 它们不仅将成为证明一些不很简单的定理的武器，而且还可用以发现并证明一些艰深的定理，而这种定理的发现与证明，在数学研究手工业式的过去，将是不可想像的. 这里我们应该着重指出，我们并不鼓励以后人们将使用计算机来证明甚至发现一些有趣的几何定理. 恰恰相反，我们希望人们不再从事这种虽然有趣却对数学甚至几何学本身也已意义不大的工作，而把自己从这种工作中解放出来，把自己的聪明才智与创造能力贯注到更有意义的脑力劳动上去.

还应该指出，目前我们所能证明的定理，局限于已经发现的机械化方法的范围，例如初等几何与初等微分几何之内. 而如何超出与扩大这些机械化的范围，则是今后需要探索的长期的理论性工作.

4. 历史的启示与中国古代数学

我们发现几何定理证明的机械化方法是在 1976 至 1977 年之间. 约在两年之后我们发现早在 1899 年出版的希尔伯特的经典名著《几何基础》中，就有着一条真正的正面的机械化定理：初等几何中只涉及从属与平行关系的定理证明可以机械化. 当然，原来的叙述并不是以机械化的语言来表达的，也许就连希尔伯特本人也并没有对这一定理的机械化意义有明确的认识，自然更不见得有其他人提到过这一定理的机械化内容. 希尔伯特是以公理化的典范而著称于世的，但我认为，该书更重要处，是在于提供了一条从公理化出发，通过代数化以到达机械化的道路. 自然，处于希尔伯特以及其后数学的一张纸一支笔的手工作业时代里，公理化的思想与方法得到足够的重视与充分的发展，而机械化的方向与意义受到数学家的忽视是完全可以理解的. 但在电子计算机已日益普及，因而繁琐而重复的计算已成为不足道的事情了，机械化的思想应比公理化思想受到更大重视，似乎是合乎实际的.

其次应该着重指出，我们从事机械化定理证明工作获得成果之前，对塔斯

基的已有工作并无接触，更没有想到希尔伯特的《几何基础》会与机械化有任何关系. 我们是在中国古代数学的启发之下提出问题并想出解决办法来的.

说起来道理也很简单：中国的古代数学基本上是一种机械化的数学. 四则运算与开方的机械化算法由来已久. 汉初完成的《九章算术》中，对开平、立方与解线性联立方程组的机械化过程，都有详细说明. 宋代更发展到高次代数方程求数值解的机械化算法.

总之各个数学领域都有定理证明的问题，并不限于初等几何或微分几何. 这种定理证明肇始于古希腊的欧几里得传统，现已成为近代纯粹数学或核心数学的主流. 与之相异，中国的古代学者重视的是各种问题特别是来自实际要求的具体问题的解决. 各种问题的已知数据与要求的数据之间，很自然地往往以多项式方程的形式出现. 因之，多项式方程的求解问题，也就自然成为中国古代数学家研究的中心问题. 从秦汉以来，所研究的方程由简到繁，不断有所前进，有所创新. 到宋元时期，更出现了一个思想与方法的飞跃：天元术的创立.

“天元术”到元代朱世杰时又发展成四元术，所引入的天元、地元、人元、物元实际上相当于近代的未知元或未知数. 将这些未知元作为通常的已知数那样加减乘除，就可得到与近代多项式与有理函数相当的概念与相应的表达形式与运算法则. 一些几何性质与关系很容易转化成这种多项式或有理函数的形式及其关系. 这使得过去依题意列方程这种无法可循需要高度技巧的工作从此变成轻而易举. 朱世杰 1303 年的《四元玉鑑》又给出了解任意多至四个未知元的多项式方程组的方法. 这里限于 4 个未知元只是由于所使用的计算工具 (算筹和算板) 的限制. 实质上他解方程的思想路线与方法完全可以适用于任意多的未知元.

不问可知，在当时的具体条件下，朱的方法有许多缺陷. 首先，当时还没有复数的概念，因之朱往往限于求出 (正) 实值. 这无可厚非，甚至在 17 世纪笛卡儿的时代也还往往如此. 但此外朱在方法上也未臻完善. 尽管如此，朱的思想路线与方法步骤是完全正确的，我们在 20 世纪 70 年代之末，遵循朱的思想与方法的基本实质，采用美国数学家里特 J. F. Ritt 在 1935, 1950 年关于微分方程代数研究书中所提供的某些技术，得出了解任意复多项式方程组的一般算法，并给出了全部复数解的具体表达形式. 此后又得出了实系数时求实解的方法，为重要的优化问题提供了一个具体的方法.

由于多种问题往往自然导致多项式方程组的求解，因而我们解方程的一般方法可被应用于形形式式的问题. 这些问题可以来自数学自身，也可以来自其他自然科学或工程技术. 在本丛书的第一本书，吴文俊的《数学机械化》一书中，可以看到这些应用的实例. 在工程技术方面的应用，在本丛书中已有高小山的《几何自动作图与智能 CAD 》与陈发来和冯玉瑜的《代数曲面造型》两

本专著. 上述解多项式方程组的一般方法已推广至代微分方程的情形. 许多应用以及相应论著正在酝酿之中.

5. 未来的技术革命与时代的使命

宋元时代天元术与四元术的创造, 把许多问题特别是几何问题转化成代数方程与方程组的求解问题. 这一方法用于几何可称为几何的代数化. 12 世纪的刘益将新法与"古法"比较, 称"省功数倍", 这可以说是减轻脑力劳动使数学走上机械化的道路的一项伟大的成就.

与天元术的创造相伴,宋元时代的数学又引进了相当于现代多项式的概念, 建立了多项式的运算法则和消元法的有关代数工具, 使几何代数化的方法得到了有系统的发展, 具见于宋元时代幸以保存至今的杨辉、李冶、朱世杰的许多著作之中. 几何的代数化是解析几何的前身, 这些创造使我国古代数学达到了又一个高峰. 可以说, 当时我国已到达了解析几何与微积分的大门, 具备了创立这些数学关键领域的条件, 但是各种原因使我们数学的雄伟步伐就在这些大门之前停顿下来. 几百年的停顿, 使我们这个古代的数学大国在近代变成了数学上的纯粹入超国家. 然而, 我国古代机械化与代数化的光辉思想和伟大成就是无法磨灭的. 本人关于数学机械化的研究工作, 就是在这些思想与成就启发之下的产物, 它是我国自《九章算术》以迄宋元时期数学的直接继承.

恩格斯曾经指出, 枪炮的出现消除了体力上的差别, 使中世纪的骑士阶级从此销声匿迹, 为欧洲从封建时代进入到资本主义时代准备了条件. 近年有些计算机科学家指出, 个人用计算机的出现, 其冲击作用可与枪炮的出现相比. 枪炮使人们在体力上难分强弱, 而个人用计算机将使人们在智力上难分聪明愚鲁. 又有人对数学的未来提出看法, 认为计算机的出现, 将使数学现在一张纸一支笔的方法, 在历史的长河中, 无异于石器时代的手工方法. 今天的数学家们, 不得不面对计算机的挑战, 但是, 也不必妄自菲薄. 大量繁复的事情交给计算机去做了, 人脑将仍然从事富有创造性的劳动.

我国在体力劳动的机械化革命中曾经掉队, 以致造成现在的落后状态. 在当前新的一场脑力劳动的机械化革命中, 我们不能重蹈覆辙. 数学是一种典型的脑力劳动, 它的机械化有着许多其他类型脑力劳动所不及的有利条件. 它的发扬与实现对我国的数学家是一种时代的使命. 我国古代数学的光辉, 鼓舞着我们为实现数学的机械化, 在某种意义上也可以说是真正的现代化而勇往直前.

吴文俊

2002 年 6 月于北京

序　言

可积系统是孤立子理论中具有挑战性的研究课题，已受到国内外诸多学者的关注. 谷超豪院士领导的“非线性科学”曾被列为我国攀登项目，在可积系统研究中我国学者取得了多项深入而系统的研究成果 [1~32]. 近几年的研究情况显示，可积系统理论现今仍然是国内外孤立子理论发展的主流和最活跃的研究领域之一.

数学机械化是近 20 年发展起来新兴的数学、计算机及人工智能的交叉学科，是数学学科的前沿和焦点，由于精确描述物理现象的非线性理论是科学发展的必然趋势，其中将不可避免地经常涉及到人力难于胜任的十分复杂且精确的代数与微分等非数值运算，所以借助计算机的大容量、高速度的特点，用精确的符号计算，机械化地来实现数学功能十分必要，其中关键是建立适合于所考虑问题的构造性的代数算法，从而在计算机上实现，导致问题的机械化解决. 自著名数学家吴文俊院士 20 世纪 70 年代末提出吴方法之后，数学机械化有了突破性进展，已在众多学科领域中得到应用 [33~37]. 但目前数学机械化原理和方法主要集中在纯代数领域，如何把这些理论和技术推广到微分情形，解决更广泛的微分问题是数学机械化发展的主要方向，也是国家基础研究发展规划“数学机械化与推理平台”的主攻方向之一.

近年来，随着计算机能力的提高，符号运算在对称理论研究的应用受到广泛重视，国内外已有了一些软件，由此大大简化了计算的工作量，解决了人力难以完成的运算，但在可积系统其他领域，如构造精确解. Darboux 变换. R - 矩阵、有限维和无穷维可积系统等方面的应用尚未引起人们足够注意，从而有必要开展数学机械化原理与方法在这些方面应用的研究. 我们通过对可积系统和计算机代数的深入研究，发现这两个内容有很好的结合点，这是由于可积系统中蕴藏着一系列十分有效的方法和技巧，而其中许多方法都是构造性和代数化的，这些运算和推理往往十分复杂，有的人力难以完成，如经典 Lie 群方法 [38,39], 利用代数方法求解非线性方程 [40], 3×3 矩阵的非线性化 [41] 等，这些都适合于应用计算机代数进行研究，计算机代数的开发和利用，将对这些问题的深入研究起很大推动作用.

求解微分方程是古老而在理论和实际上又很重要的研究课题，显式解，特别是行波解可以很好的描述各种物理现象，如振动、传播波等. 但由于非线性方程的复杂性，至今仍有大量的重要方程无法求出精确解，即使已经求出精确解，也各有各的技巧，至今尚无一般的求解方法. 所幸的是孤立子理论中蕴藏着一系列构造精确解的有效方法，如反散射法 [42], Bäcklund 法 [1,43,44], Darboux 变换法 [2,45], Hirota 双线性法 [42], 延拓法 [46,47], Painlevé 分析法 [48,49] 及 Lie 群

法 [38,39] 等. 随着各种求解方法的不断出现, 不但过去一些难以求解的方程得到解决, 而且不断发现许多非线性方程有重要意义的新解. 近年来, 随着计算机的发展和符号运算如 Maple 或 Mathematica 的出现, 直接构造非线性方程的解越来越受到重视, 使复杂、冗长的代数运算可在计算机上完成, 并可发现新的解 [50~57]. 吴消元法 [33,34] 和 Gröbner 基方法 [58,59] 为我们提供了求解非线性代数方程组的系统而有效的工具, 构造非线性方程精确解最有效的直接方法之一为 Tanh 函数法 [51~54,60~62], 其算法的基本原理基于绝大部分有物理意义的非线性方程的孤波解都可表示成 “Tanh” 函数的多项式形式, 最近, Parkes 和 Duffy 发展了基于 Mathematica 自推理的 Tanh 函数法的软件包 “ATFM”, 使得复杂的代数运算可在计算机上完成并直接输出所要求的解 [51]. 李志斌在计算机代数系统 Maple 上进一步开发了构造非线性方程孤波解的一种软件包 “RATH”, 与 ATFM 相比, 自动化程度更高, 得到的解更多 [56]. 其他的推广可见 [57,63,64]. 在第一章中, 我们对 Tanh 函数法提出两种推广并在计算机系统实现: (1) 提出了应用符号运算和吴方法构造非线性方程的多形式的行波解的广义 Tanh 方法, 关键是用带有参数的 Riccati 方程代替 Tanh 方法中的 Tanh 函数, 而有趣的是这个参数的符号可判断行波解的数量和类型. 同时通过引入适当的变换将该方法进一步拓广到具有任意非零实平衡数的一般发展方程以及非微分多项式的特殊方程, 从而大批的方程可用该方法处理并发现新的行波解. (2) 发展了基于符号运算统一构造非线性方程的孤波解、有理解、三角函数周期解、Weierstrass 和 Jacobi 椭圆函数双周期解的代数化方法, 其中许多解利用传统直接积分法或 Tanh 方法等所不能得到的.

给定一个非线性偏微分方程, 是否可用反散射方法求解是孤立子理论中的一个基本而尚未解决的问题, 1980 年, Ablowitz, Ramani 和 Segur 发现, 可反散射求解的偏微分方程, 用精确约化得到常微分方程都具有 Painlevé 性质, 由此, 他们提出一个猜测 [42,65]: 一个非线性偏微分方程可反散射求解仅当约化得到每个常微分方程都是 P- 型的, 这种猜测给出了可积性检验的一种 “探测器”. 1983 年, Weiss, Tabor 和 Carnevale 通过推广常微分方程的 Painlevé 性质, 提出了偏微分方程 Painlevé 性质与可积性的联系, 使之能有效地用于研究许多非线性系统的可积性 [48,66]. 作为 “副产品”, 并可由此得到非线性方程的 Lax 对和 Bäcklund 变换 [66~70]. 为统一和扩充常微分方程各类求解方法, 19 世纪后期, Lie 引进了连续群的概念 (即今 Lie 群, 也称不变群或对称群)[71], Lie 证明了: 一个微分方程如果在单参数 Lie 群作用下不变, 则其阶数可减少一次. 之后, Lie 又考察了偏微分方程情形, 建立了热方程的局部变换群, 开创了 Lie 群在偏微分方程的应用. 经典 Lie 群是求微分方程相似解的系统而标准的方法, 然而这种方法需要进行大量复杂的代数运算且不能得到所有的相似约化 [38,39].

1969 年，Blumaan 和 Cole 推广了 Lie 群方法，提出了非经典 Lie 群方法 [67]. 最近 Clarkson 和 Kruskal 等发展了一种简单而有效的对称性约化的直接方法（通常称 C-K 直接法），他们将此方法运用于 1+1 维 Boussinesq 方程可得到该方程所有形式的相似解，而群论方法的结果只是直接法的一些特例 [72], 且采用这种方法明显的特点是不涉及群理论，对许多非线性方程，C-K 方法比经典 Lie 群更容易实现，且可获得新的相似约化和精确解. 之后，这种方法被楼森岳进一步推广到 2+1 维 Kadomtsev-Petviashvili 和色散长波方程 [73,74]. 目前已经发现一大批偏微分方程可用 C-K 方法处理将其约化为常微分方程或低维偏微分方程 [77,78]. 在第二章, 我们推广齐次平衡法并用于寻求非线性微分方程的 Bäcklund 变换和相似解，相应的结果分别与 WTC 方法及 C-K 方法一致. 而用推广的齐次平衡法避免了 WTC 方法中共振点和递推关系的讨论且可获得更一般形式的 Bäcklund 变换；与 Clarkson-Kruskal 方法相比，用推广的齐次平衡法可减少一个自由度，使运算更简单，而结果不变，并进一步从理论上证明了齐次平衡法、WTC 方法、C-K 方法之间的联系 [79,80].

Lax 表示和零曲率表示是非线性发展方程两种换位表示，特别是零曲率表示在可积系统中起着重要作用，许多著名的非线性发展方程族都是基于零曲率方程导出的 [1,2,14,15]. 对于线性谱问题，曹策问首先提出了非线性方程换位表示的一般框架 [9]. 之后这种思想分别被乔志军推广到一般线性和非线性谱问题 [223,24]. 马文秀进一步研究了线性谱问题的零曲率表示及其代数结构 [30,31]. 利用这些方法可产生许多著名的方程族，如 AKNS, WKI, KN, BPT, Levi 族及换位表示 [23,24]. 第三章，我们直接从谱问题出发并利用泛函梯度，发展了生成非线性发展方程族以及构造相应方程族零曲率表示的一般方法，这一结果是对乔志军方法的变形和简化 [24], 同时是马文秀结果的推广 [29], 使得能有效地构造更复杂的方程族，如 Geng, BPT 和 Tu 族等的零曲率表示.

寻找和扩充 Lax 或 Liouville 意义下的可积系统是孤立子理论研究的重要课题，同时寻找新的可积系统并与具有物理意义的方程联系起来也是十分困难的. Bi-Hamilton 结构是证明非线性方程完全可积的直接而优美的方法 [38,81~84]. 近年来，我国学者在这方面取得了很大成果，屠规彰提出的迹恒等式是构造无穷维 Hamilton 系统的有效方法，由一个谱问题出发，可得到许多方程族及其 Hamilton 系统，如，AKNS, TC, TA, BPT, Yang 族 [14,15]. 曹策问提出的 Lax 对非线性化法是构造有限维可积 Hamilton 系统的有效方法，在 Bargmann 或 Neumann 约束下，可将特征值问题非线性化为有限维完全可积的 Hamilton 系统，如 KdV, AKNS, Jaulent-Miodek, Kaup-Newell 族等 [10~13,85~87]. 这种方法的另外一个重要应用是将与特征值问题联系的孤子方程的求解问题转化为求解相容的常微分方程 [85~87]. 之后，这种方法被曾云波、李翊神推广到高阶约束流

并获得更一般的有限维可积 Hamilton 系统 [18,19,88]. 在第四章, 我们通过引入新的谱问题, 导出了新的广义 Kaup-Newell 型方程族, 我们发现多种著名的方程如 Kundu 方程、 Kaup-Newell 方程、 Chen-Lee-Liu 方程、 Gerjikov-Ivavov 方程、 MKdV 方程、 Burgers 方程和 Sharma-Tasso-Olver 方程等均可做为特殊的约化包含在该方程族中, 并利用迹恒等式证明了该方程族在 Liouville 可积并拥有多 Hamilton 结构. 并应用非线性化的技巧, 将谱问题非线性化为 Lioville 意义下完全可积的有限维 Hamilton 系统.

Darboux 变换方法是构造非线性方程显式解的十分有效的方法之一 [1,2,45]. 通常从一个平凡解出发, 首次 Darboux 变换和连续做 Darboux 变换可分别得到方程的单孤子解和多孤子解. 构造 Darboux 变换的关键是寻找一种保持相应的 Lax 对不变的规范变换. 在这方面已发展很多技巧并应用于求解多种方程, 如 KdV 方程, Davey-Stewartson 方程, self-dual Yang-Mills 流, Einstein-Maxwell 方程等 [2~8,89~99]. 在复旦大学, 谷超豪院士、胡和生院士以及他们领导的研究小组取得了一系列创造性的系统成果, 提出了各种优美的方法并成功地应用于 AKNS 族、 Davey-Stewartson 方程、 self-dual Yang-Mills 流等 [2~8,91~99]. 在第五章, 我们研究了多种方程(族)的 Darboux 变换和精确解, 利用 Lax 对, 给出构造耦合 Kundu 方程 N 次 Darboux 变换的一种技巧, 将耦合 Kundu 方程的求解问题转化为求解两个代数方程组和一个一阶常微分方程, 这对于利用符号运算产生 N 孤子解十分便利. 最后, 利用约化技巧将耦合 Kundu 方程的 Darboux 变换约化为 Kundu 方程的 Darboux 变换, 从而获得了 KN, Chen-Lee-Liu 和 Gerjikov-Ivanov 方程 Darboux 变换的统一公式. 从一个谱问题出发, 我们导出了联系色散长水波方程的方程族, 并进一步利用 Darboux 阵的方法构造了该方程族的 N 次 Darboux 变换. 从种子解出发并利用 Darboux 变换, 获得了色散长水波方程非常一般的类孤子解, 其中包括新的孤子解. 利用两种分离变量的技巧和 1+1 维方程的 Darboux 变换, 我们给出了 2+1 维 Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程含有多参数的两种 N 次 Darboux 变换的公式. 通过对经典 q-KdV 方程族的 Lax 对适当变形, 我们使用矩阵形式的 Lax 对导出了依赖于时间 t 的变系数广义 q-KdV 方程族. 将 Darboux 矩阵方法 [2,92] 进一步推广到该方程族, 建立整个 q-KdV 方程族一种统一而显式的 Darboux 变换, 并证明了这种 Darboux 变换的 auto-Bäcklund 变换性质、可换定理和非线性叠加公式. 利用 Darboux 变换我们给出 q-KdV 方程族一种统一孤子解公式, 特别地, 我们给出了单孤子解和双孤子解的显式公式.

我们知道, 物理或工程中的数学模型通常可归结为偏微分方程, 这些方程的各种性质, 如显式精确解、对称、守恒律、 Hamilton 结构等在解释物理现象中十分重要. 但非线性偏微分方程的数量十分繁多, 况且随着科学技术的快速

发展，大量新的偏微分方程不断从各个学科中涌现，目前尚无专门的书籍收集这些方程. 我们感觉，有必要将这些方程收集成一个手册，并简述每个方程的背景、研究状况等，这将为从事偏微分方程研究的学者带来极大的帮助. 但考虑到这是一个非常庞大的工作，限于本书的篇幅，在第六章做为附录，整理收集了作者在研究过程中发现的 200 余个偏微分方程，对每个方程附加必要的参考文献，以便感兴趣的读者进一步追查更详细的相关内容，待以后条件成熟时，我们将提供更多的方程和更详细的结果.

本书的主体内容由作者近年来在可积系统和计算机代数应用方面的一系列研究成果构成，书中大部分结果曾在谷超豪院士、胡和生院士主持的研究小组中报告、讨论过. 这些研究工作得到了国家基础研究发展规划“数学机械化与自动推理平台”、国家自然科学基金、上海曙光计划、中国博士后基金和上海博士后基金的支持，并在国家教委复旦大学非线性数学模型和方法开放实验室、复旦大学数学研究所完成. 在此，感谢谷超豪院士、胡和生院士对作者的培养、关怀和支持. 感谢复旦大学数学研究所洪家兴教授、中国科学院理论物理研究所吴可研究员、大连理工大学张鸿庆教授对作者研究工作以及出版本书的热情关心和帮助. 感谢复旦大学数学研究所周子翔教授、丁青教授、傅吉祥副教授，华东师范大学李志斌教授，上海交通大学楼森岳教授的有益讨论和建议. 当然，特别感谢吴文俊院士、高小山研究员领导的国家基础研究发展规划“数学机械化与自动推理平台”对作者研究工作的大力支持，以及科学出版社吕虹编审、张扬编辑为出版本书所作的努力和付出的辛勤劳动.

目　录

第1章　非线性方程多种形式的行波解

在这一章中，我们给出两种构造非线性方程多形式行波解的代数化方法并在计算机系统中实现：其一，给出利用一符号运算和吴方法构造非线性方程的多形式的行波解的广义 Tanh 方法，关键是用带有参数的 Riccati 方程的解代替 Tanh 方法中的 Tanh 函数，而这个参数的符号可判断行波解的数量和类型. 其二，发展了基于符号运算统一构造非线性方程的孤波解、有理解和周期解的代数化方法.

§1.1　推广的 Tanh 函数法及其应用

我们知道绝大部分有物理意义的非线性方程孤波解都可表示成 “Tanh” 函数的多项式形式 [51~55], 例如， Burgers 方程

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0$$

的孤子解为

$$u = c - c\tanh\xi,$$

其中 $\xi = \frac{c}{2}(x - ct)$, c 为一常数； KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

具有孤子解

$$u = 2c^2 - 2c^2\tanh^2\xi,$$

其中 $\xi = c(x - 4c^2t)$, c 为一常数. 这一现象启发人们用较少的技巧和更直接的方法构造非线性方程孤波解，这种方法首先被楼森岳等用于求解复杂的方程[60], 之后被 Malfliet 系统化为构造非线性方程孤波解的 Tanh 函数法[61]. 最近，Parkes 和 Duffy 发展了基于 Mathematica 的自推理的 Tanh 函数法的软件包 “ATFM”, 使得复杂的代数运算可在计算机上完成并直接输出所要求的解 [51]. 李志斌在计算机代数系统 Maple 上进一步开发构造非线性方程孤波解的一种软件包 “RATH”, 与 ATFM 相比，自动化程度更高、得到的解更多 [56], 其他的推广可见 [57,63,64]. 为下文需要，现将 Tanh 函数法简述如下：

对给定的非线性方程

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, \cdots) = 0, \tag{1.1}$$

根据 Tanh 函数法，方程 (1.1) 的解 u 可表示为

$$u(x,t)=U(\xi)=\sum_{i=0}^{n}a_i\varphi^i, \tag{1.2}$$

其中 $\varphi(x,t)=\tanh(k\xi),\xi=x+ct$. n 为一正整数，可通过平衡方程 (1.1) 的非线性项和最高阶导数项得到； $k,c,a_0,\cdots,a_n$ 为待定参数. 将 (1.2) 代入方程 (1.1) 并令 φ^i 的系数为零可得到一关于 $k,c,a_0,\cdots,a_n$ 的多项式方程组，由此可得到 $k,c,a_0,\cdots,a_n$. 然而，利用这种方法只能得到非线性方程孤波型解，如果用 $\tan(k\xi)$ 替换 $\tanh(k\xi)$, 可得到 tan 形式的解，但需要做大量的重复运算 [100,101], 如果方程根本不存在这种解，所做的工作将是徒劳的. 因此，一个自然的问题：是否可用一种统一的方法构造这些行波解？此外， Tanh 函数法中的平衡数 n 要求为正整数，但有的非线性方程的平衡数 n 可能为负整数，甚至分数，在这种情况下是否仍可应用 Tanh 函数法？这里，我们提出一种方法，给这两个问题一个肯定回答.

这种方法的关键思想是充分利用带有一个参数的 Riccati 方程

$$\varphi'=b+\varphi^2, \tag{1.3}$$

其中 $'':=\dfrac{d}{d\xi}$, b 为一待定参数，使用 (1.3) 解替换 Tanh 方法中的 tanh 函数，其他过程类似于 Tanh 函数法的处理 [51~54,62~64]. 反复利用方程 (1.3), 可将 φ 的所有导数转化为 φ 的多项式来表示，而 Riccati 方程 (1.3) 具有三种类型的一般解

$$\varphi=-\sqrt{-b}\tanh\sqrt{-b}\xi,\quad -\sqrt{-b}\coth\sqrt{-b}\xi,\quad b<0. \tag{1.4}$$

$$\varphi=-\frac{1}{\xi},\qquad b=0. \tag{1.5}$$

$$\varphi=\sqrt{b}\tan\sqrt{b}\xi,\quad -\sqrt{b}\cot\sqrt{b}\xi,\quad b>0. \tag{1.6}$$

我们看到 (1.2) 中 tanh 函数仅是 (1.4)~(1.6) 的一种特殊情况. 利用 Riccati 方程 (1.3) 的另外一个好处是参数 b 的符号可用于判断所得行波解的数量和形状. 例如, 当 $b<0$, 我们知道方程 (1.1) 存在 tanh 形式和 coth 形式的行波解; 而 b 任意常数时，方程 (1.1) 具有 5 种类型的行波解. 据此，无需额外费力可得到非线性方程新的以及更一般的行波解. 这里我们给出的算法也是机械化的，产生和求解代数方程组是两个十分麻烦的过程, 手工完成十分困难, 但利用 Mathematica 和吴消元法在计算机上实现十分方便. 计算机输出结果 $\{b,c,a_0,\cdots\}$ 中，如果 b 或其他任何参数没有确定的值，可认为是任意的. 下面我们用几个例子来说明这种方法，由于 cot 、 coth 形式的行波解与 tan 、 tanh 形式的行波解成对出现，为简单起见我们只给出 tan 和 tanh 形式的行波解.

例 1.1.1 考虑 Burgers-Huxley 方程 [102]

$$u_t + puu_x - u_{xx} + qu(u-1)(u-s) = 0, \tag{1.7}$$

其中 p, q 和 s 为实参数且 $p^2 + q^2 \neq 0$.

为寻找方程 (1.7) 的解, 我们首先做变换 $u(x,t) = U(\xi), \xi = x + ct$, 将方程 (1.7) 化为一常微分方程

$$cU' + pUU' - U'' + qU(U-1)(U-s) = 0. \tag{1.8}$$

U'' 与 U^3 或 UU' 平衡可得 $n = 1$, 因此我们可选取

$$U = a_0 + a_1\varphi. \tag{1.9}$$

将 (1.9) 代入 (1.8) 得到关于 a_0, a_1, b and c 的一代数方程组

$$\begin{aligned}
&qa_1^3 + pa_1^2 - 2a_1 = 0,\\
&a_1c + qa_1^2(a_0 - s) + qa_1^2(2a_0 - 1) + pa_0a_1 = 0,\\
&-2a_1b + qa_1(2a_0 - 1)(a_0 - s) + qa_0a_1(a_0 - 1) + pa_1^2b = 0,\\
&a_1bc + pa_0a_1b + qa_0(a_0 - 1)(a_0 - s) = 0.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

我们讨论两种情况

(i) 当 $q \neq 0$ 时, Mathematica 给出方程 (1.10) 的解为

$$a_0 = \frac{1}{2},\quad a_1 = \frac{-p \pm r}{2q},\quad c = \frac{(-p \pm r)(2s-1) - 2p}{4},\quad b = -\frac{1}{4a_1^2}, \tag{1.11}$$

$$a_0 = \frac{s}{2},\quad a_1 = \frac{-p \pm r}{2q},\quad c = \frac{(-p \pm r)(2-s) - 2ps}{4},\quad b = -\frac{s^2}{4a_1^2}, \tag{1.12}$$

$$a_0 = \frac{s+1}{2},\quad a_1 = \frac{-p \pm r}{2q},\quad c = \frac{-(p \pm r)(s+1)}{4},\quad b = -\frac{(s-1)^2}{4a_1^2}, \tag{1.13}$$

其中 $r = \sqrt{p^2 + 8q}$. 由于 $b \leq 0$, 因此利用 (1.4), (1.5), (1.11)~(1.13), 我们得到 Burgers-Huxley 方程的行波解为

$$\begin{aligned}
&u_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tanh\left[\frac{q}{-p \pm r}\left(x + \frac{(-p \pm r)(2s-1) - 2p}{4}t\right)\right],\\
&u_{3,4} = \frac{s}{2} - \frac{s}{2}\tanh\left[\frac{qs}{-p \pm r}\left(x + \frac{(-p \pm r)(2-s) - 2ps}{4}t\right)\right]g,\\
&u_{5,6} = \frac{s+1}{2} - \frac{s-1}{2}\tanh\left[\frac{q(s-1)}{-p \pm r}\left(x + \frac{-(p \pm r)(s+1)}{4}t\right)\right],\\
&u_{7,8} = \frac{p \pm r}{q[2x - (p \pm r)t]} \qquad (s = 0),\\
&u_{9,10} = 1 + \frac{p \pm r}{q[2x + (p \pm r)t]} \qquad (s = 1).
\end{aligned}$$

在特殊情况 $p=0,q=1$ 下，这些解恰满足 Fitzhugh-Nagumo 方程 [103]

$$u_t - u_{xx} + u(u-1)(u-s) = 0.$$

(ii) 当 $q=0, p\neq 0$ 时，方程 (1.10) 有解

$$a_0 = -\frac{c}{p},\quad a_1 = \frac{2}{p},$$

其中 b , c 为任意常数. 在这种情况下，我们得到 Burgers 方程

$$u_t + puu_x - u_{xx} = 0$$

的行波解:

$$u_1 = -\frac{c}{p} - \frac{2}{p}\sqrt{-b}\tanh\sqrt{-b}(x+ct)\quad (b<0);$$

$$u_2 = -\frac{c}{p} - \frac{2}{p(x+ct)}\quad (b=0);$$

$$u_3 = -\frac{c}{p} + \frac{2}{p}\sqrt{b}\tan\sqrt{b}(x+ct)\quad (b>0).$$

例 1.1.2　*考虑 KdV-Burgers-Kuramoto 方程* [104,105]

$$u_t + uu_x + pu_{xx} + qu_{xxx} + ru_{xxxx} = 0, \tag{1.14}$$

其中 p, q, r 为实常数，这个方程在物理中描述湍流运动和不稳定现象中起着重要作用 [104~107].

为寻找方程 (1.14) 的行波解, 做变换 $u(x,t)=U(\xi),\xi=x+ct$ 将方程 (1.14) 约化为

$$cU' + UU' + pU'' + qU''' + rU^{(4)} = 0. \tag{1.15}$$

$U^{(4)}$ 与 UU' 平衡，可得 $n=3$, 因此，我们选取

$$U = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3. \tag{1.16}$$

将 (1.16) 代入方程 (1.15) 并利用 Mathematica, 得到关于 a_0,a_1,a_2,a_3,b, c 的代数方程组

$$bca_1 + 2b^2qa_1 + ba_0a_1 + 2b^2pa_2 + 16b^3ra_2 + 6b^3qa_3 = 0,$$

$$2bpa_1 + 16b^2ra_1 + ba_1^2 + 2bca_2 + 16b^2qa_2 + 2ba_0a_2 + 6b^2pa_3 + 120b^3ra_3 = 0,$$

$$ca_1 + 8bqa_1 + a_0a_1 + 8bpa_2 + 136b^2ra_2 + 3ba_1a_2 + 3bca_3 + 60b^2qa_3 + 3ba_0a_3 = 0,$$

$$2pa_1 + 40bra_1 + a_1^2 + 2ca_2 + 40bqa_2 + 2a_0a_2 + 2ba_2^2 + 18bpa_3 + 576b^2ra_3 + 4ba_1a_3 = 0,$$

$$6qa_1 + 6pa_2 + 240bra_2 + 3a_1a_2 + 3ca_3 + 114bqa_3 + 3a_0a_3 + 5ba_2a_3 = 0,$$
$$24ra_1 + 24qa_2 + 2a_2^2 + 12pa_3 + 816bra_3 + 4a_1a_3 + 3ba_3^2 = 0,$$
$$120ra_2 + 60qa_3 + 5a_2a_3 = 0,$$
$$360ra_3 + 3a_3^2 = 0,$$

利用计算机代数中的吴消元法，可得

$$a_0 = -c,\ \ a_1 = -\frac{60p}{19},\ \ a_2 = 0,\ \ a_3 = -120r,\ \ q = 0,\ \ b = 0, \tag{1.17}$$

$$a_0 = -c,\ \ a_1 = -\frac{90p}{19},\ \ a_2 = 0,\ \ a_3 = -120r,\ \ q = 0,\ \ b = \frac{p}{76r}, \tag{1.18}$$

$$a_0 = -c,\ \ a_1 = \frac{270p}{19},\ \ a_2 = 0,\ \ a_3 = -120r,\ \ q = 0,\ \ b = -\frac{11p}{76r}, \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned} &a_0 = -c \mp 11p\sqrt{\frac{p}{r}},\ \ a_1 = -30p,\ \ a_2 = \mp 60\sqrt{pr},\ \ a_3 = -120r,\\ &q = \pm 4\sqrt{pr},\ \ b = \frac{p}{4r}, \end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned} &a_0 = -c \pm 9p\sqrt{\frac{p}{r}},\ \ a_1 = 30p,\ \ a_2 = \mp 60\sqrt{pr},\ \ a_3 = -120r,\\ &q = \pm 4\sqrt{pr},\ \ b = -\frac{p}{4r}, \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} &a_0 = -c \pm \frac{45p}{47}\sqrt{\frac{p}{47r}},\ \ a_1 = -\frac{90p}{47},\ \ a_2 = \mp 180\sqrt{\frac{pr}{47}},\ \ a_3 = -120r,\\ &q = \pm 12\sqrt{\frac{pr}{47}},\ \ b = -\frac{p}{188r}, \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned} &a_0 = -c \pm \frac{60p}{73}\sqrt{\frac{p}{73r}},\ \ a_1 = -\frac{150p}{73},\ \ a_2 = \mp 240\sqrt{\frac{pr}{73}},\ \ a_3 = -120r,\\ &q = \pm 16\sqrt{\frac{pr}{73}},\ \ b = -\frac{p}{292r}, \end{aligned} \tag{1.23}$$

其中 c 为任意常数. 下面根据 b 的符号，我们讨论方程 (1.14) 的多行波解情况

由于在 (1.17) 中 $b = 0$, 根据 (1.5) 我们得到有理形式的行波解

$$u_1 = -c + \frac{60p}{19\xi} + \frac{120r}{\xi^3},\ \ \xi = x + ct,\ \ (q = 0).$$

当 $pr < 0$ 时，我们看到 (1.18) 中 $b < 0$, 在 (1.19) 中 $b > 0$, 根据 (1.4) 和 (1.6), 相应的行波解为

$$u_2 = -c - 15rk^3 \tanh(\xi)\left[3 - \tanh^2(\xi)\right],\ \ k = \sqrt{-\frac{p}{19r}},\ \ \xi = \frac{1}{2}k(x + ct)\ \ (q = 0).$$

$$u_3 = -c - 15rk^3\tan(\xi)\left[\frac{9}{11} + \tan^2(\xi)\right], \quad k = \sqrt{-\frac{11p}{19r}}, \quad \xi = \frac{1}{2}k(x+ct) \quad (q=0).$$

当 $pr > 0$ 时, 我们看到 (1.19), (1.21), (1.22), (1.23) 中 $b < 0$, 在 (1.18), (1.20) 中 $b > 0$, 根据 (1.4) 和 (1.6), 相应的行波解为:

$$u_4 = -c - 15rk^3\tanh(\xi)\left[\frac{9}{11} - \tanh^2(\xi)\right], \quad k = \sqrt{\frac{11p}{19r}}, \quad \xi = \frac{1}{2}k(x+ct) \quad (q=0).$$

$$u_5 = -c \pm 9rk^3 - 15rk^3\tanh(\xi)\left[1 \pm \tanh(\xi) - \tanh^2(\xi)\right], \quad k = \sqrt{\frac{p}{r}},$$

$$\xi = \frac{1}{2}k(x+ct) \quad (q = \pm 4\sqrt{pr}).$$

$$u_6 = -c \pm 45rk^3 + 15rk^3\tanh(\xi)\left[3 \mp 3\tanh(\xi) + \tanh^2(\xi)\right], \quad k = \sqrt{\frac{p}{47r}},$$

$$\xi = \frac{1}{2}k(x+ct) \quad \left(q = \pm 12\sqrt{\frac{pr}{47}}\right),$$

$$u_7 = -c \pm 60rk^3 + 15rk^3\tanh(\xi)\left[5 \mp 4\tanh(\xi) + \tanh^2(\xi)\right], \quad k = \sqrt{\frac{p}{73r}},$$

$$\xi = \frac{1}{2}k(x+ct) \quad \left(q = \pm 16\sqrt{\frac{pr}{73}}\right).$$

$$u_8 = -c - 15rk^3\tan(\xi)\left[3 + \tan^2(\xi)\right], \quad k = \sqrt{\frac{p}{19r}},$$

$$\xi = \frac{1}{2}k(x+ct) \quad (q=0).$$

$$u_9 = -c \mp 11rk^3 - 15rk^3\tan(\xi)\left[1 \pm \tan(\xi) + \tan^2(\xi)\right], \quad k = \sqrt{\frac{p}{r}},$$

$$\xi = \frac{1}{2}k(x+ct) \quad (q = \pm 4\sqrt{pr}).$$

在这些解中, u_2, u_4, u_5, u_6,u_7 被 Parkes 和 Duffy 发现 [51]. 这些解的特殊情况 $q = 0$, 即 u_1, u_2, u_3, u_4, u_8 满足 Kuramoto-Sivashinsky 方程 [104,106]

$$u_t + uu_x + pu_{xx} + ru_{xxxx} = 0.$$

例 1.1.3 对 $2+1$ 维 KdV-Burgers 方程 [62,63]

$$(u_t + uu_x + pu_{xxx} - qu_{xx})_x + ru_{yy} = 0, \tag{1.24}$$

我们考虑它的行波解 $u(x,t) = U(\xi)$, $\xi = x + dy + ct$, 则方程 (1.24) 化为

$$(cU' + UU' + pU''' - qU'')' + rd^2U'' = 0. \tag{1.25}$$

平衡 U''' 与 UU' 得到 $n=2$, 因此可选取

$$U=a_0+a_1\varphi+a_2\varphi^2. \tag{1.26}$$

将 (1.26) 代入 (1.25) 并利用 Mathematica 得到如下代数方程组:

$$\begin{cases}-2b^2qa_1+b^2a_1^2+2b^2ca_2+16b^3pa_2+2b^2d^2ra_2+2b^2a_0a_2=0,\\ 2bca_1+16b^2pa_1+2bd^2ra_1+2ba_0a_1-16b^2qa_2+6b^2a_1a_2=0,\\ -8bqa_1+4ba_1^2+8bca_2+136b^2pa_2+8bd^2ra_2+8ba_0a_2+6b^2a_2^2=0,\\ 2ca_1+40bpa_1+2d^2ra_1+2a_0a_1-40bqa_2+18ba_1a_2=0,\\ -6qa_1+3a_1^2+6ca_2+240bpa_2+6d^2ra_2+6a_0a_2+16ba_2^2=0,\\ 24pa_1-24qa_2+12a_1a_2=0,\\ 120pa_2+10a_2^2=0.\end{cases}$$

应用吴消元法，可得

$$a_0=-c+\frac{q}{25p}-d^2r,\quad a_1=\frac{12q}{5},\quad a_2=-12p,\quad b=0, \tag{1.27}$$

$$a_0=-c+\frac{3q^2}{25p}-d^2r,\quad a_1=\frac{12q}{5},\quad a_2=-12p,\quad b=-\frac{q^2}{100p^2}, \tag{1.28}$$

其中 c, d 为任意常数.

由于 $b\le 0$, 利用 (1.27), (1.28) 可得到

$$u_1=-c+\frac{q}{25p}-d^2r-\frac{12q}{5\xi}-\frac{12p}{\xi^2},\quad \xi=x+dy+ct,$$

$$u_2=-\frac{3q^2}{25p}[1+\tanh(\xi)]^2+\frac{6q^2}{25p}-(c+d^2r),\quad \xi=\frac{q}{10p}(x+dy+ct). \tag{1.29}$$

显然，这些解含有两个任意常数 c, d, 在变换 $d\to\frac{5p}{q}d$, $c+d^2r\to -c$ 下，解 (1.29) 恰与文献 [62] 的解一致.

例 1.1.4 对 Cadrey-Dodd-Gibbon-Kawda 方程 [66]

$$u_t+(u_{xxxx}+30uu_{xx}+60u^3)_x=0, \tag{1.30}$$

考虑行波解 $u(x,t)=U(\xi)$, $\xi=x+ct$, 则方程 (1.30) 约化为

$$cU'+(U^{(4)}+30UU''+60U^3)'=0. \tag{1.31}$$

$U^{(5)}$ 与 $(UU'')'$ 平衡得到 $n=2$, 因此我们选取

$$U=a_0+a_1\varphi+a_2\varphi^2. \tag{1.32}$$

将 (1.32) 代入 (1.31) 并使用 Mathematica 产生如下代数方程组

$$
\left\{
\begin{aligned}
&720a_2+1080a_2^2+360+60a_2^3=0,\\
&120a_1+1200a_1a_2+900a_1a_2^2=0,\\
&240a_1^2+1680ba_2+720a_0a_2+720a_1^2a_2+2040ba_2^2+720a_0a_2^2+360ba_2^3=0,\\
&240ba_1+180a_0a_1+180a_1^3+2100ba_1a_2+1080a_0a_1a_2+900ba_1a_2^2=0,\\
&360ba_1^2+360a_0a_1^2+1232b^2a_2+2ca_2+1200ba_0a_2+360a_0^2a_2\\
&\qquad+720ba_1^2a_2+1080b^2a_2^2+720ba_0a_2^2=0,\\
&136b^2a_1+ca_1+240ba_0a_1+180a_0^2a_1+180ba_1^3+960b^2a_1a_2+1080ba_0a_1a_2=0,\\
&120b^2a_1^2+360ba_0a_1^2+272b^3a_2+2bca_2+480b^2a_0a_2+360ba_0^2a_2+120b^3a_2^2=0,\\
&16b^3a_1+bca_1+60b^2a_0a_1+180ba_0^2a_1+60b^3a_1a_2=0.
\end{aligned}
\right.
$$

利用消元法，可得

$$a_1=0,\quad a_2=-1,\quad c=-4(19b^2+60ba_0+45a_0^2). \tag{1.33}$$

$$a_1=0,\quad a_2=-1,\quad c=-45a_0^2,\quad b=0. \tag{1.34}$$

$$a_0=-\frac{16b}{15},\quad a_1=0,\quad a_2=-1,\quad c=-\frac{124b^2}{5}. \tag{1.35}$$

$$a_0=-\frac{5b}{6},\quad a_1=0,\quad a_2=-1,\quad c=-b^2. \tag{1.36}$$

$$a_0=-\frac{2b}{3},\quad a_1=0,\quad a_2=-1,\quad c=4b^2. \tag{1.37}$$

$$a_0=-\frac{4b}{3},\quad a_1=0,\quad a_2=-2,\quad c=-16b^2. \tag{1.38}$$

易见，解 (1.34)~(1.37) 是 (1.33) 的特殊情况. 由 (1.33) 和 (1.38), 得到

$$
\begin{aligned}
&u_1=a_0-\frac{1}{(x-45a_0t)^2}\quad (b=0).\\
&u_2=a_0+b\tanh^2\{\sqrt{-b}[x-4(19b^2+60ba_0+45a_0^2)t]\}\quad (b<0).\\
&u_3=-\frac{4b}{3}+2b\tanh^2[\sqrt{-b}(x-16b^2t)]\quad (b<0).\\
&u_4=a_0-b\tan^2\{\sqrt{b}[x-4(19b^2+60ba_0+45a_0^2)t]\}\quad (b>0).\\
&u_5=-\frac{4b}{3}-2b\tan^2[\sqrt{b}(x-16b^2t)]\quad (b>0).
\end{aligned}
$$

例 1.1.5 考虑形变 Boussinesq 方程 [120]

$$u_t+v_x+uu_x+pu_{xxt}=0, \tag{1.39}$$

$$v_t+(uv)_x+qu_{xxx}=0. \tag{1.40}$$

令 $u(x,t)=U(\xi)$, $v(x,t)=V(\xi)$, $\xi=x+ct$, 则方程 (1.39), (1.40) 约化为

$$cU'+V'+UU'+pU'''=0, \tag{1.41}$$

$$cV'+(UV)'+qU'''=0. \tag{1.42}$$

通过 U''' 与 UU' 平衡， U''' 与 $(UV)'$ 平衡，我们可作出如下假设

$$U=a_0+a_1\varphi+a_2\varphi^2,\quad V=b_0+b_1\varphi+b_2\varphi^2. \tag{1.43}$$

将 (1.43) 代入方程 (1.41) 和 (1.42), 得到

$$\begin{aligned}
&bca_1+2b^2cpa_1+ba_0a_1+bb_1=0,\\
&ba_1^2+2bca_2+16b^2cpa_2+2ba_0a_2+2bb_2=0,\\
&ca_1+8bcpa_1+a_0a_1+3ba_1a_2+b_1=0,\\
&a_1^2+2ca_2+40bcpa_2+2a_0a_2+2ba_2^2+2b_2=0,\\
&6cpa_2+3a_1a_2=0,\\
&24cpa_2+2a_2^2=0,\\
&2b^2qa_1+ba_1b_0+bcb_1+ba_0b_1=0,\\
&16b^2qa_2+2ba_2b_0+2ba_1b_1+2bcb_2+2ba_0b_2=0,\\
&8bqa_1+a_1b_0+cb_1+a_0b_1+3ba_2b_1+3ba_1b_2=0,\\
&40bqa_2+2a_2b_0+2a_1b_1+2cb_2+2a_0b_2+4ba_2b_2=0,\\
&6qa_1+3a_2b_1+3a_1b_2=0,\\
&24qa_2+4a_2b_2=0.
\end{aligned}$$

利用吴消元法，给出

$$\begin{gathered}
a_0=\frac{a_2^2+8pba_2^2+72pq}{12pa_2},\quad a_1=b_1=0,\quad b_0=\frac{4(9q^2-bqa_2^2)}{a_2^2},\\
b_2=-6q,\quad c=-\frac{a_2}{12p},
\end{gathered} \tag{1.44}$$

其中 b, a_2 为任意常数.

由 (1.4)~ (1.6) 和 (1.44), 我们得到三种形式的行波解

$$
\begin{aligned}
u_1 &= a_0 - a_2 b \tanh^2\left[\sqrt{-b}\left(x - \frac{a_2}{12p}t\right)\right],\\
v_1 &= b_0 + 6qb \tanh^2\left[\sqrt{-b}\left(x - \frac{a_2}{12p}t\right)\right] \quad (b<0);\\
u_2 &= a_0 + \frac{a_2}{\left(x - \dfrac{a_2}{12p}t\right)^2},\\
v_2 &= b_0 - \frac{6q}{\left(x - \dfrac{a_2}{12p}t\right)^2} \quad (b=0);\\
u_3 &= a_0 + 4b \tan^2\left[\sqrt{b}\left(x - \frac{a_2}{12p}\right)t\right],\\
v_3 &= b_0 - 6qb \tan^2\left[\sqrt{b}\left(x - \frac{a_2}{12p}\right)t\right] \quad (b>0).
\end{aligned}
$$

其中 a_0, b_0 由 (1.44) 给出

例 1.1.6 *考虑新的耦合 MKdV 方程* [85]

$$
\begin{aligned}
p_t &= \frac{1}{2}p_{xxx} - 3p^2 p_x + \frac{3}{2}(qr)_{xx} + 3(pqr)_x,\\
q_t &= -q_{xxx} - 3(qp_x)_x - 3q^2 r_x + 6pqp_x + 3p^2 q_x,\\
r_t &= -r_{xxx} - 3(rp_x)_x - 3r^2 q_x + 6prp_x + 3p^2 r_x,
\end{aligned} \tag{1.45}
$$

当 $q=r=0$ 时，方程 (1.45) 约化为通常的 MKdV 方程.

为构造方程 (1.45) 的行波解，我们利用变换 $p(x,t)=P(\xi)$, $q(x,t)=Q(\xi)$, $r(x,t)=R(\xi)$, $\xi = x+ct$ 将方程 (1.45) 约化为

$$
\begin{aligned}
cP' &= \frac{1}{2}P''' - 3P^2P' + \frac{3}{2}(QR)'' + 3(PQR)',\\
cQ_t &= -Q''' - 3(QP')' - 3Q^2R' + 6PQP' + 3P^2Q',\\
cR' &= -R''' - 3(RP')' - 3R^2Q' + 6PRP' + 3P^2R'.
\end{aligned} \tag{1.46}
$$

通过平衡 (1.46) 的非线性项与线性项，使得我们可作出如下假设

$$
P = a_0 + a_1\varphi, \quad Q = b_0 + b_1\varphi, \quad R = c_0 + c_1\varphi. \tag{1.47}
$$

将 (1.47) 代入方程 (1.46) 并利用 Mathematica, 得到一代数关于 a_i, b_i,

$c_i(i=0,1)$, b 和 c 的方程组

$$\left\{\begin{array}{l}
cba_1-b^2a_1+3ba_0^2a_1-3ba_1b_0c_0-3ba_0b_1c_0-3ba_0b_0c_1-3b^2b_1c_1=0,\\
6ba_0a_1^2-3bb_1c_0-6ba_1b_1c_0-3bb_0c_1-6ba_1b_0c_1-6ba_0b_1c_1=0,\\
ca_1-4ba_1+3a_0^2a_1+3ba_1^3-3a_1b_0c_0-3a_0b_1c_0-3a_0b_0c_1-12bb_1c_1\\
\quad -9ba_1b_1c_1=0,\\
6a_0a_1^2-3b_1c_0-6a_1b_1c_0-6a_1b_0c_1-3b_1c_1-6a_1b_0c_1-6a_0b_1c_1=0,\\
-3a_1+3a_1^3-9b_1c_1-9a_1b_1c_1=0,\\
-6ba_0a_1b_0+cbb_1+2b^2b_1-3ba_0^2b_1+3b^2a_1b_1+3bb_0^2c_1=0,\\
6ba_1b_0-6ba_1^2b_0-12ba_0a_1b_1+6bb_0b_1c_1=0,\\
-6a_0a_1b_0+cb_1+8bb_1-3a_0^2b_1+12ba_1b_1-9ba_1^2b_1+3b_0^2c_1+3bb_1^2c_1=0,\\
6a_1b_0-6a_1^2b_0-12a_0a_1b_1+6b_0b_1c_1=0,\\
6b_1+9a_1b_1-9a_1^2b_1+3b_1^2c_1=0,\\
-6ba_0a_1c_0+3bb_1c_0^2+cbc_1+2b^2c_1-3ba_0^2c_1+3b^2a_1c_1=0,\\
6ba_1c_0-6ba_1^2c_0-12ba_0a_1c_1+6bb_1c_0c_1=0,\\
-6a_0a_1c_0+3b_1c_0^2+cc_1+8bc_1-3a_0^2c_1+12ba_1c_1-9ba_1^2c_1+3bb_1c_1^2=0,\\
6a_1c_0-6a_1^2c_0-12a_0a_1c_1+6b_1c_0c_1=0,\\
6c_1+9a_1c_1-9a_1^2c_1+3b_1c_1^2=0.
\end{array}\right.$$

利用吴方法，得到

$$b_0=\frac{a_0}{2c_1},\quad c_0=2a_0c_1,\quad b_1=\frac{1}{4c_1},\quad a_1=-\frac{1}{2},\quad c=-\frac{1}{2}(b+12a_0^2), \tag{1.48}$$

其中 $a_0, b, c_1\neq 0$ 为任意常数.

既然 b 为任意常数，根据 (1.4)~(1.6), (1.47) 和 (1.48), 我们得到方程 (1.45) 三种类型的行波解

$$\begin{aligned}
p&=a_0+\frac{\sqrt{-b}}{2}\tanh\left\{\sqrt{-b}\Big[x-\frac{1}{2}(b+12a_0^2)t\Big]\right\},\\
q&=\frac{a_0}{2c_1}-\frac{\sqrt{-b}}{4c_1}\tanh\left\{\sqrt{-b}\Big[x-\frac{1}{2}(b+12a_0^2)t\Big]\right\},\\
r&=2a_0c_1-c_1\sqrt{-b}\tanh\left\{\sqrt{-b}\Big[x-\frac{1}{2}(b+12a_0^2)t\Big]\right\}\quad (b<0).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p&=a_0-\frac{\sqrt{b}}{2}\tan\left\{\sqrt{b}\Big[x-\frac{1}{2}(b+12a_0^2)t\Big]\right\},\\
q&=\frac{a_0}{2c_1}+\frac{\sqrt{b}}{4c_1}\tan\left\{\sqrt{b}[x-\frac{1}{2}(b+12a_0^2)t]\right\},\\
r&=2a_0c_1+c_1\sqrt{b}\tan\left\{\sqrt{b}[x-\frac{1}{2}(b+12a_0^2)t]\right\}\quad (b>0).
\end{aligned}$$

$$p = a_0 + \frac{1}{2(x - 6a_0^2 t)}, \quad q = \frac{a_0}{2c_1} - \frac{1}{4c_1(x - 6a_0^2 t)}, \quad r = 2a_0 c_1 - \frac{c_1}{x - 6a_0^2 t} \quad (b = 0).$$

例 1.1.7 考虑耦合 KdV 方程 [109]

$$u_t + 6uu_x - 6vv_x + u_{xxx} = 0, \tag{1.49}$$

$$v_t + 3uv_x + v_{xxx} = 0. \tag{1.50}$$

这个方程主要用于描述不同色散的长短波间的相互作用。

令 $u(x,t) = U(\xi)$, $v(x,t) = V(\xi)$, $\xi = x + ct$, 则方程 (1.49) 和 (1.50) 化为

$$cU' + 6UU' - 6VV' + U''' = 0, \tag{1.51}$$

$$cV' + 3UV' + V''' = 0. \tag{1.52}$$

通过 U''' 与 VV' 平衡, V''' 与 UV' 平衡, 可作出如下假设

$$U = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2, \quad V = b_0 + b_1\varphi + b_2\varphi^2. \tag{1.53}$$

将 (1.53) 代入 (1.51) 和 (1.52) 给出

$$\begin{aligned}
&24a_2 - 12b_2^2 + 12a_2^2 = 0,\\
&6a_1 + 18a_1a_2 - 18b_1b_2 = 0,\\
&40a_2b + 12a_0a_2 + 6a_1^2 + 12a_2^2b - 12b_0b_2 - 6b_1^2 - 12b_2^2b + 2a_2c = 0,\\
&8a_1b + 6a_0a_1 + 18a_1a_2b - 6b_0b_1 - 18b_1b_2b + a_1c = 0,\\
&16a_2b^2 + 12a_0a_2b + 6a_1^2b - 12b_0b_2b - 6b_1^2b + 2a_2bc = 0,\\
&2a_1b^2 + 6a_0a_1b - 6b_0b_1b + a_1bc = 0,\\
&24b_2 + 6a_2b_2 = 0,\\
&6b_1 + 6a_1b_2 + 3a_2b_1 = 0,\\
&40b_2b + 2b_2c + 6a_0b_2 + 3a_1b_1 + 6a_2b_2b = 0,\\
&8b_1b + b_1c + 3a_0b_1 + 6a_1b_2b + 3a_2b_1b = 0,\\
&16b_2b^2 + 2b_2bc + 6a_0b_2b + 3a_1b_1b = 0,\\
&2b_1b^2 + b_1bc + 3a_0b_1b = 0.
\end{aligned}$$

利用吴方法, 得到

$$\begin{aligned}
&a_0 = -\frac{1}{3}(c + 8b), \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -4, \quad b_0 = \pm\frac{1}{3\sqrt{2}}(c + 8b),\\
&b_1 = 0, \quad b_2 = \pm 2\sqrt{2}.
\end{aligned} \tag{1.54}$$

其中 c, b 为任意常数.

由 (1.4)~(1.6), (1.53) 和 (1.54), 我们得到三种类型的行波解

$$
\begin{aligned}
u_1 &= -\frac{1}{3}(c+8b) + 4b\tanh^2[\sqrt{-b}(x+ct)],\\
v_1 &= \pm\frac{1}{3\sqrt{2}}(c-8b) \mp 2\sqrt{2}b\tanh^2[\sqrt{-b}(x+ct)] \quad (b<0);\\
u_2 &= \frac{1}{3}c - \frac{4}{(x+ct)^2},\\
v_2 &= \pm\frac{1}{3\sqrt{2}}c \pm \frac{2\sqrt{2}}{(x+ct)^2} \quad (b=0);\\
u_3 &= -\frac{1}{3}(c+8b) - 4b\tan^2[\sqrt{b}(x+ct)],\\
v_3 &= \pm\frac{1}{3\sqrt{2}}(c+8b) \pm 2\sqrt{2}b\tan^2[\sqrt{b}(x-ct)] \quad (b>0),
\end{aligned}
$$

其中第一种解 (u_1, v_1) 为王明亮曾给出的钟状孤波解 [109].

注意到 U''' 与 UU', V''' 与 UV' 间的平衡, 可给出另外一种假设

$$
U = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2, \quad V = b_0 + b_1\varphi. \tag{1.55}
$$

在这种情况下, 我们发现 u 为扭状, v 为钟状的一种新的重要孤波解.

将 (1.55) 代入 (1.51) 和 (1.52), 可得一代数方程组

$$
\begin{aligned}
&24a_2 + 12a_2 = 0,\\
&6a_1 + 18a_1a_2 = 0,\\
&40a_2b + 2a_2c + 12a_0a_2 + 6a_1^2 - 6b_1 + 12a_2^2b = 0,\\
&8a_1b + a_1c + 6a_0a_1 + 18a_1a_2b - 6b_0 = 0,\\
&16a_2b^2 + 2a_2bc + 12a_0a_2b + 6a_1^2b - 6b_1b = 0,\\
&2a_1b^2 + a_1bc + 6a_0a_1b - 6b_0b = 0,\\
&6b_1 + 3a_2b_1 = 0,\\
&3a_1b_1 = 0,\\
&8b_1b + b_1c + 3a_0b_1 + 3a_2b_1b = 0,\\
&2b_1b^2 + b_1bc + 3a_0b_1b = 0.
\end{aligned}
$$

该方程组有解

$$
a_0 = -2b - \frac{1}{2}b_1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -2, \quad b_0 = 0, c = 4b + \frac{3}{2}b_1. \tag{1.56}
$$

其中 b_1, b 为任意常数.

于是由 (1.4)~(1.6) 和 (1.56), 得到三种新的行波解

$$u_4 = -2b - \frac{1}{2}b_1 + 2b\tanh^2\left\{\sqrt{-b}\left[x + \left(4b + \frac{3}{2}b_1\right)t\right]\right\},$$

$$v_4 = -b_1\sqrt{-b}\tanh\left\{\sqrt{-b}\left[x + \left(4b + \frac{3}{2}b_1\right)t\right]\right\} \quad (b < 0),$$

$$u_5 = -\frac{1}{2}b_1 - \frac{2}{\left(x + \frac{3}{2}b_1 t\right)^2},$$

$$v_5 = -\frac{b_1}{x + \frac{3}{2}b_1 t} \quad (b = 0),$$

$$u_6 = -2b - \frac{1}{2}b_1 - 2b\tan^2\left\{\sqrt{b}\left[x + \left(4b + \frac{3}{2}b_1\right)t\right]\right\},$$

$$v_6 = b_1\sqrt{b}\tan\left\{\sqrt{b}\left[x + \left(4b + \frac{3}{2}b_1\right)t\right]\right\} \quad (b > 0).$$

§1.2 利用推广的 Tanh 方法求解特殊类型的方程

这一节, 我们进一步处理特殊类型的方程, 这种方程不能直接使用 Tanh 方法或推广的 Tanh 方法, 需要做适当的预处理. 对于平衡数 n 为非正整数情况, 可引入变换 $u = v^{1/n}$ 将方程 (1.1) 转化为具有正整数平衡数的关于 v 的方程, 从而可用上节方法处理; 对于非微分多项式形式的方程, 通过适当的变换转化为微分多项式形式的方程. 下面举例说明:

例 1.2.1 *考虑广义 Burgers-Fisher 方程* [110]

$$u_t + pu^r u_x - u_{xx} - qu(1 - u^r) = 0, \tag{1.57}$$

其中 p, q 和 r 为参数.

令 $u(x,t) = U(\xi), \xi = x + ct$, 则方程 (1.57) 约化为

$$cU' + pU^r U' - U'' - qU(1 - U^r) = 0. \tag{1.58}$$

U'' 与 $U^r U'$ 平衡得到 $n = 1/r$, 显然当 $r \neq 1$, 它不是整数. 为应用公式 (1.2) 和 (1.3), 做变换 $U = V^{1/r}$, 再将方程 (1.58) 约化为

$$qr^2V^2(1 - V) + (1 - r)V'^2 - rV(cV' + pVV' - V'') = 0. \tag{1.59}$$

平衡方程 (1.59) 中 V'' 与 VV' 可得 $n = 1$, 因此, 我们假设

$$U = a_0 + a_1\varphi. \tag{1.60}$$

将 (1.60) 代入方程 (1.59), 可得

$$
\begin{aligned}
&-qr^2a_0^2+qr^2a_0^3+bcra_0a_1+bpra_0^2a_1-b^2a_1^2+b^2ra_1^2=0,\\
&-2bra_0a_1-2qr^2a_0a_1+3qr^2a_0^2a_1+bcra_1^2+2bpra_0a_1^2=0,\\
&cra_0a_1+pra_0^2a_1-2ba_1^2-qr^2a_1^2+3qr^2a_0a_1^2+bpra_1^3=0,\\
&-2ra_0a_1+cra_1^2+2pra_0a_1^2+qr^2a_1^3=0,\\
&-a_1^2-ra_1^2+pra_1^3=0,
\end{aligned}
$$

利用 Mathematica, 得到

$$a_0=\frac{1}{2},\quad a_1=\frac{1+r}{pr},\quad b=-\frac{p^2r^2}{4(1+r)^2},c=-\frac{p^2+q(1+r)^2}{p(1+r)}.$$

由于 $b<0$, 我们有

$$u=\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{2(1+r)}(x-\frac{p^2+q(1+r)^2}{p(1+r)}t)\right]\right\}^{1/r}.$$

例 1.2.2 考虑非线性热传导方程 [182]

$$u_t-(u^2)_{xx}=pu-qu^2, \tag{1.61}$$

其中 $p,q\neq 0$ 为常数.

令 $u(x,t)=U(\xi),\xi=x+ct$, 则方程 (1.51) 化为

$$cU'-(U^2)''-pU+qU^2=0. \tag{1.62}$$

U' 与 $(U^2)''$ 平衡, 可得 $n=-1$, 这是一个负数. 做变换 $U=V^{-1}$, 则方程 (1.62) 约化为

$$-pV^3-6V'^2+V^2(q-cV')+2VV''=0. \tag{1.63}$$

现在 V^2V' 与 VV'' 平衡, 可得 $n=1$, 所以

$$V=a_0+a_1\varphi. \tag{1.64}$$

将 (1.64) 代入 (1.63), 得到

$$
\begin{aligned}
&qa_0^2-pa_0^3-bca_0^2a_1-6b^2a_1=0,\\
&4ba_0a_1+2qa_0a_1-3pa_0^2a_1-2bca_0a_1^2=0,\\
&-ca_0^2a_1-8ba_1^2+qa_1^2-3pa_0a_1^2-bca_1^3=0,\\
&4a_0a_1-2ca_0a_1^2-pa_1^3=0,\\
&-2a_1^2-ca_1^3=0.
\end{aligned}
$$

该方程组有解

$$a_0 = \frac{q}{2p},\quad a_1 = \pm\frac{2\sqrt{q}}{p},\quad c = \mp\frac{p}{\sqrt{q}},\quad b = -\frac{q}{16}.$$

由于要求 a_1 和 c 为实数, 因此 $b < 0$, 于是

$$u_{1,2} = 2p\left\{q \pm q\tanh\left[\frac{\sqrt{q}}{4}\left(x \pm \frac{p}{\sqrt{q}}\right)\right]\right\}^{-1}.$$

例 1.2.3　考虑广义 Fisher 方程 [64]

$$u_t - u_{xx} = pu(1-u^r)(q+u^r). \tag{1.65}$$

其中 p, q 和 r 为参数.

令 $u(x,t) = U(\xi), \xi = x + ct$, 则方程 (1.65) 约化为

$$cU' - U'' = pU(1-U^r)(q+U^r). \tag{1.66}$$

U'' 与 U^{2r+1} 平衡, 可得 $n = 1/r$, 当 $r \neq 1$ 不是整数. 做变换 $U = V^{1/r}$ 将方程 (1.66) 约化为

$$rcVV' + p(q-1)r^2V^3 - pqr^2V^2 + pr^2V^4 + (r-1)V'^2 - rVV'' = 0. \tag{1.67}$$

现在方程 (1.67) 中, V^3 与 VV'' 平衡, 我们发现 $n = 1$, 因此, 选取

$$V = a_0 + a_1\varphi. \tag{1.68}$$

将 (1.68) 代入 (1.67) 得到

$$\begin{aligned}
&-pqr^2a_0^2 - pr^2a_0^3 + pqr^2a_0^3 + pr^2a_0^4 + bcra_0a_1 - b^2a_1^2 + b^2ra_1^2 = 0,\\
&-2bra_0a_1 - 2pqr^2a_0a_1 - 3pr^2a_0^2a_1 + 3pqr^2a_0^2a_1 + 4pr^2a_0^3a_1 + bcra_1^2 = 0,\\
&cra_0a_1 - 2ba_1^2 - pqr^2a_1^2 - 3pr^2a_0a_1^2 + 3pqr^2a_0a_1^2 + 6pr^2a_0^2a_1^2 = 0 = 0,\\
&-2ra_0a_1 + cra_1^2 - pr^2a_1^3 + pqr^2a_1^3 + 4pr^2a_0a_1^3 = 0,\\
&-a_1^2 - ra_1^2 + pr^2a_1^4 = 0.
\end{aligned}$$

利用 Mathematica, 得到

$$a_0 = \frac{1}{2},\quad a_1 = \pm\frac{1}{r}\sqrt{\frac{r+1}{p}},\quad c = \mp(1+q+rq)\sqrt{\frac{p}{r+1}},\quad b = -\frac{pr^2}{4(r+1)}. \tag{1.69}$$

$$a_0 = -\frac{q}{2},\quad a_1 = \pm\frac{1}{r}\sqrt{\frac{r+1}{p}},\quad c = \pm(1+q+r)\sqrt{\frac{p}{r+1}},\quad b = -\frac{pq^2r^2}{4(r+1)}. \tag{1.70}$$

由于 a_1 和 c 为实数，可知 $p(r+1)>0, b<0$. 由 (1.4), (1.68)~(1.70), 我们得到广义 Fisher 的行波解

$$u_{1,2}=\left\{\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\tanh\left[\frac{r}{2}\sqrt{\frac{p}{r+1}}\left(x\pm(1+q+qr)\sqrt{\frac{p}{r+1}}t\right)\right]\right\}^{1/r}.$$

$$u_{3,4}=\left\{-\frac{q}{2}\pm\frac{q}{2}\tanh\left[\frac{qr}{2}\sqrt{\frac{p}{r+1}}\left(x\mp(1+q+r)\sqrt{\frac{p}{r+1}}t\right)\right]\right\}^{1/r}.$$

解 $u_{1,2}$ 曾被王明新得到 [108], 而 $u_{3,4}$ 为新解，当 $q=-1$ 时，$u_{1,2}$ 与 $u_{3,4}$ 相同.

例 1.2.4 *考虑双 Sine-Gordon 方程* [224]

$$u_{xt}=\sin u+\sin(2u). \tag{1.71}$$

由于在应用广义 Tanh 方法时，方程 (1.71) 中的 sine 函数带来困难，可令 $v=e^{iu}$, 则

$$\sin u=\frac{v-v^{-1}}{2i},\quad \sin 2u=\frac{v^2-v^{-2}}{2i}.$$

从而，方程 (1.71) 转化为多项式形式的方程

$$2vv_{xt}-2v_xv_t-v^4-v^3+v+1=0. \tag{1.72}$$

现构造 (1.72) 的行波解，做变换 $v=V(\xi), \xi=x+ct$, 将方程 (1.72) 约化为

$$2cVV''-2cV'^2-V^4-V^3+V+1=0. \tag{1.73}$$

平衡 VV'' 和 V^4 得到 $n=1$, 因此

$$V=a_0+a_1\varphi. \tag{1.74}$$

将 (1.74) 代入 (1.73) 得到

$$\begin{aligned}
&1+a_0-a_0^3-a_0^4-2b^2ca_1^2=0,\\
&a_1+4a_0a_1cb-3a_0^2a_1-4a_0^3a_1=0,\\
&-3a_0a_1^2-6a_0^2a_1^2=0,\\
&4a_0a_1c-a_1^3-4a_0a_1^3=0,\\
&2a_1^2c-a_1^4=0.
\end{aligned}$$

该方程组有如下解

$$a_0=-\frac{1}{2},\quad c=\frac{1}{2}a_1^2,\quad b=\frac{3}{4a_1^2},$$

其中 $a_1 \neq 0$ 为任一常数.

由于 $b > 0$, 根据 (1.6), 得到双 Sine-Gordon 方程如下行波解

$$u = \arccos\left(\frac{(\sqrt{3}\tan\theta - 1)^2 + 4}{4(\sqrt{3}\tan\theta - 1)}\right),$$

其中 $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2a_1}\xi = \frac{\sqrt{3}}{2a_1}\left(x + \frac{1}{2}a_1^2 t\right)$.

例 1.2.5　考虑 2+1 维 Sine-Gordon 方程 [356]

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + m^2 \sin u = 0. \tag{1.75}$$

类似于例 1.2.4, 做变换 $v = e^{iu}$, $v(x,t) = V(\xi)$, $\xi = x + dy + ct$, 将方程 (1.75) 化为

$$2(c^2 - d^2 - 1)(VV'' + V'^2) + m^2(V^3 - V) = 0. \tag{1.76}$$

平衡 VV'' 和 V^3, 可假设

$$V = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2. \tag{1.77}$$

将 (1.77) 代入 (1.76) 并利用 Mathematica 得到

$$\begin{aligned}
&-m^2a_0 + m^2a_0^3 - 2(c^2 - d^2 - 1)b^2a_1^2 + 4(c^2 - d^2 - 1)b^2a_0a_2 = 0,\\
&-m^2a_1 + 4(c^2 - d^2 - 1)b^2a_0a_1 + 3m^2a_0^2a_1 - 4(c^2 - d^2 - 1)b^2a_1a_2 = 0,\\
&3m^2a_0a_1^2 - m^2a_2 + 16(c^2 - d^2 - 1)b^2a_0a_2 + 3m^2a_0^2a_2\\
&\qquad -4(c^2 - d^2 - 1)b^2a_2^2 = 0,\\
&4(c^2 - d^2 - 1)b^2a_0a_1 - m^2a_1^3 + 4(c^2 - d^2 - 1)b^2a_1a_2 + 6m^2a_0a_1a_2 = 0,\\
&2(c^2 - d^2 - 1)b^2a_1^2 + 12(c^2 - d^2 - 1)b^2a_0a_2 + 3m^2a_1^2a_2 + 3m^2a_0a_2^2 = 0,\\
&8(c^2 - d^2 - 1)b^2a_1a_2 + 3m^2a_1a_2^2 = 0,\\
&4(c^2 - d^2 - 1)b^2a_2^2 + m^2a_2^3 = 0.
\end{aligned}$$

借助 Mathematica, 得到

$$a_0 = a_1 = 0,\quad a_2 = \frac{1}{b},\quad d = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-4 + 4c^2 + \frac{m^2}{b^2}},$$

$$a_0 = a_1 = 0,\quad a_2 = -\frac{1}{b},\quad d = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-4 + 4c^2 - \frac{m^2}{b^2}},$$

其中 $b\neq 0, c$ 为任意常数. 既然 $b\neq 0$, 由 (1.4) 和 (1.6) 得到

$$u_1 = \arccos\left(\frac{\tanh^4\sqrt{-b}\xi \mp 1}{2\tanh^2\sqrt{-b}\xi}\right),\quad b<0,$$
$$u_2 = \arccos\left(\frac{\tan^4\sqrt{b}\xi \pm 1}{2\tan^2\sqrt{b}\xi}\right),\quad b>0,$$

其中 $\xi = x \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4+4c^2\pm\frac{m^2}{b^2}}y+ct$.

例 1.2.6 考虑 Dodd-Bullough-Mikhailov 方程 [16]

$$u_{xt}+pe^u+qe^{-2u}=0. \tag{1.78}$$

当 $q=0$ 时, 该方程化为 Liouville 方程 [245].

做变换 $u=\ln v$, $v=V(\xi), \xi=x+ct$, 则方程 (1.78) 化为

$$c(VV''-V'^2)+pV^3+q=0. \tag{1.79}$$

平衡 VV'' 与 V^3 可假设

$$V=a_0+a_1\varphi+a_2\varphi^2. \tag{1.80}$$

将 (1.80) 代入 (1.79) 并利用 Mathematica, 得到

$$\begin{aligned}
&q+pa_0^3-cb^2a_1^2+2cb^2a_0a_2=0,\\
&2cka_0a_1+3pa_0^2a_1-2cb^2a_1a_2=0,\\
&3pa_0a_1^2+8cka_0a_2+3pa_0^2a_2-2cb^2a_2^2=0,\\
&2cb^2a_0a_1+pa_1^3+2cb^2a_1a_2+6pa_0a_1a_2=0,\\
&ck^2a_1^2+6cb^2a_0a_2+3pa_1^2a_2+3pa_0a_2^2=0,\\
&4ck^2a_1a_2+3pa_1a_2^2=0,\\
&2cb^2a_2^2+pa_2^3=0.
\end{aligned}$$

利用 Mathematica, 可得到两组解

$$q=0,\quad a_1=0,\quad a_0=ka_2,\quad c=-\frac{1}{2}pa_2, \tag{1.81}$$

其中 a_2, b 为常数.

$$a_1=0,\quad a_0=\frac{q^{\frac{1}{3}}}{2p^{\frac{1}{3}}},\quad a_2=\frac{3q^{\frac{1}{3}}}{2p^{\frac{1}{3}}b},\quad c=-\frac{(p^2q)^{\frac{1}{3}}}{4b}, \tag{1.82}$$

其中 $b \neq 0$ 为常数.

于是由 (1.4), (1.6) 和 (1.81), 得到 Liouville 方程 ($q = 0$) 的三组解

$$u_1 = \ln(ka_2 \mathrm{sech}^2 \sqrt{-b}\xi), \quad b < 0,$$
$$u_2 = \ln(a_2 b \sec^2 \sqrt{b}\xi), \quad b > 0,$$
$$u_3 = \ln \frac{a_2}{\xi^2}, \quad b = 0,$$

其中 $\xi = x - \frac{1}{2} p a_2 t$.

由 (1.4), (1.6) 和 (1.82), 得到 Dodd-Bullough-Mikhailov 方程 ($q \neq 0$) 的两组解

$$u_1 = \ln \left[\frac{q^{\frac{1}{3}}}{2p^{\frac{1}{3}}} (1 - 3\tanh^2 \sqrt{-b}\xi) \right], \quad b < 0,$$
$$u_2 = \ln \left[\frac{q^{\frac{1}{3}}}{2p^{\frac{1}{3}}} (1 + 3\tan^2 \sqrt{b}\xi) \right], \quad b > 0,$$

其中 $\xi = x - \frac{(p^2 q)^{\frac{1}{3}}}{4b} t$.

例 1.2.7 对于 Sinh-Gordon 方程 [242]

$$u_{xt} = \sinh u.$$

由于

$$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2},$$

用类似于例 1.2.6 的方法，可得到 Sinh-Gordon 方程的两组解

$$u_1 = \ln \left[\tanh^2 \sqrt{-b} \left(x - \frac{1}{4b} t \right) \right], \quad b < 0,$$
$$u_2 = \ln \left[\tan^2 \sqrt{b} \left(x + \frac{1}{4b} t \right) \right], \quad b > 0.$$

例 1.2.8 考虑耦合 Schrödinger-KdV 方程 [187]

$$\begin{aligned} iu_t &= u_{xx} + uv, \\ v_t + 6vv_x + v_{xxx} &= (|u|^2)_x. \end{aligned} \tag{1.83}$$

令

$$u = e^{i\theta} U(\xi), \quad v = V(\xi), \quad \theta = \alpha x + \beta t, \quad \xi = x + ct, \tag{1.84}$$

其中 α, β 和 c 为常数.

将 (1.84) 代入 (1.83), 可知 $c = 2\alpha$, 而 U, V 满足如下耦合常微分方程组

$$\begin{aligned} &U'' + (\beta - \alpha^2)U + UV = 0, \\ &2\alpha V' + 6VV' + V''' - (U^2)'' = 0. \end{aligned} \tag{1.85}$$

平衡 (1.85) 中的最高线性项和非线性项，可假设

$$U = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2, \quad V = b_0 + b_1\varphi + b_2\varphi^2 \tag{1.86}$$

将 (1.86) 代入 (1.85), 得到

$$\begin{aligned}
&-\alpha^2 a_0 + \beta a_0 + 2b^2 a_2 + a_0 b_0 = 0, \\
&2ka_1 - \alpha^2 a_1 + \beta a_1 + a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0, \\
&8ka_2 - \alpha^2 a_2 + \beta a_2 + a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0, \\
&2a_1 + a_2 b_1 + a_1 b_2 = 0, \\
&6a_2 + a_2 b_2 = 0, \\
&-2ka_0 a_1 + 2b^2 b_1 + 2\alpha k b_1 + 6kb_0 b_1 = 0, \\
&-2ka_1^2 - 4ka_0 a_2 + 6kb_1^2 + 16b^2 b_2 + 4\alpha k b_2 + 12kb_0 b_2 = 0, \\
&-2a_0 a_1 - 6ka_1 a_2 + 8kb_1 + 2\alpha b_1 + 6b_0 b_1 + 18kb_1 b_2 = 0, \\
&-2a_1^2 - 4a_0 a_2 - 4ka_2^2 + 6b_1^2 + 40kb_2 + 4\alpha b_2 + 12b_0 b_2 + 12kb_2^2 = 0, \\
&-6a_1 a_2 + 6b_1 + 18b_1 b_2 = 0, \\
&-4a_2^2 + 24b_2 + 12b_2^2 = 0.
\end{aligned}$$

利用 Mathematica, 得到

$$\begin{aligned}
&a_0 = \pm 2\sqrt{2}b, \quad a_1 = b_1 = 0, \quad a_2 = \pm 6\sqrt{2}, \quad b_0 = -\frac{1}{3}(8b + \alpha), \\
&b_2 = -6, \quad \beta = \frac{1}{3}(3\alpha^2 + \alpha - 10b),
\end{aligned}$$

其中 b, α 为任意常数;

$$\begin{aligned}
&a_0 = b_1 = a_2 = 0, \quad b_0 = -\frac{1}{12}(16b + 4\alpha + a_1^2), \quad b_2 = -2, \\
&\beta = \frac{1}{12}(12\alpha^2 + 4\alpha - 8b + a_1^2),
\end{aligned}$$

其中 b, a_1 和 α 为任意常数.

既然 b 为任意，根据 (1.4)~ (1.6), 我们获得耦合 Schrödinger-KdV 方程多种行波解

$$u_1 = \pm 2\sqrt{2}b(1 - 3\tanh^2\sqrt{-b}\xi)e^{i\theta},$$

$$v_1 = -\frac{1}{3}(8b+\alpha) + 6b\tanh^2\sqrt{-b}\xi, \quad b<0;$$

$$u_2 = \pm 2\sqrt{2}b(1 + 3\tan^2\sqrt{b}\xi)e^{i\theta},$$

$$v_2 = -\frac{1}{3}(8b+\alpha) - 6b\tan^2\sqrt{b}\xi, \quad b>0,$$

其中 $\xi = x + 2\alpha t,\ \ \theta = \alpha x + \frac{1}{3}(3\alpha^2 + \alpha - 10b)t.$

$$u_3 = \pm\frac{6\sqrt{2}}{\xi^2}e^{i\theta}, \quad v_3 = -\frac{1}{3}\alpha - \frac{6}{\xi^2}, \quad b=0,$$

其中 $\xi = x + 2\alpha t,\ \ \theta = \alpha x + \frac{1}{3}(3\alpha^2 + \alpha)t.$

$$u_4 = -a_1\sqrt{-b}\tanh\sqrt{-b}\xi e^{i\theta},$$

$$v_4 = -\frac{1}{12}(16b + 4\alpha + a_1^2) + 2b\tanh^2\sqrt{-b}\xi, \quad b<0;$$

$$u_5 = a_1\sqrt{b}\tan\sqrt{b}\xi e^{i\theta},$$

$$v_5 = -\frac{1}{12}(16b + 4\alpha + a_1^2) - 2b\tan^2\sqrt{b}\xi, \quad b>0,$$

其中 $\xi = x + 2\alpha t,\ \ \theta = \alpha x + \frac{1}{12}(12\alpha^2 + 4\alpha - 8b + a_1^2)t.$

$$u_6 = -\frac{a_1}{\xi}e^{i\theta}, \quad v_6 = -\frac{1}{12}(16b + 4\alpha + a_1^2) - \frac{2}{\xi^2}, \quad b=0,$$

其中 $\xi = x + 2\alpha t,\ \ \theta = \alpha x + \frac{1}{12}(12\alpha^2 + 4\alpha + a_1^2)t.$

例 1.2.9 考虑 $(2+1)$ 维 Davey-Stewartson 方程 [2]

$$\begin{aligned} &iu_t + u_{xx} - u_{yy} - 2|u|^2u - 2uv = 0, \\ &v_{xx} + v_{yy} + 2(|u|^2)_{xx} = 0. \end{aligned} \tag{1.87}$$

令

$$u = e^{i\theta}U(\xi), \quad v = V(\xi), \quad \theta = \alpha x + \beta y + \delta t, \quad \xi = x + dy + ct, \tag{1.88}$$

其中 α, β, δ, d 和 c 为实常数.

将 (1.88) 代入 (1.87), 可见 $c=-2(\alpha-\beta d)$, 并且 U, V 满足

$$\begin{aligned}&(\beta^2-\alpha^2-\delta)U+(1-d^2)U''-2U^3-2UV=0,\\&(1+d^2)V''+(V^2)''=0.\end{aligned} \tag{1.89}$$

平衡线性项与非线性项可假设

$$U=a_0+a_1\varphi,\quad V=b_0+b_1\varphi+b_2\varphi^2, \tag{1.90}$$

将 (1.90) 代入 (1.89) 得到

$$\begin{aligned}
&(\beta^2-\alpha^2-\delta)a_0-2a_0^3-2a_0b_0=0,\\
&2ka_1-2d^2ka_1+(\beta^2-\alpha^2-\delta)a_1-6a_0^2a_1-2a_1b_0-2a_0b_1=0,\\
&-6a_0a_1^2-2a_1b_1-2a_0b_2=0,\\
&2a_1-2d^2a_1-2a_1^3-2a_1b_2=0,\\
&4b^2a_1^2+2b^2b_2+2b^2d^2b_2=0,\\
&8ka_0a_1+2kb_1+2bd^2b_1=0,\\
&16ka_1^2+8kb_2+8bd^2b_2=0,\\
&8a_0a_1+2b_1+2d^2b_1=0,\\
&12a_1^2+6b_2+6d^2b_2=0.
\end{aligned}$$

该方程组有解

$$b_0=\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2-\delta-2a_0^2),\quad b_1=-2a_0a_1,\quad b_2=-a_1^2,\quad d=\pm1, \tag{1.91}$$

这里 b, α, β, δ, a_0 和 a_1 为任意常数;

$$a_0=b_1=0,\quad b_0=\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2-\delta+2b-2d^2b),\quad a_1=\pm i\sqrt{1+d^2},\quad b_2=2. \tag{1.92}$$

这里 b,α,β, d 和 δ 为任意常数.

既然 b 任意, 根据 (1.4)~(1.6) 和 (1.91)~(1.92)

$$\begin{aligned}
&u_1=a_0-a_1\sqrt{-b}\tanh\sqrt{-b}\xi e^{i\theta},\\
&v_1=\frac{1}{12}(\beta^2-\alpha^2-\delta-2a_0^2)+2a_0a_1\tanh\sqrt{-b}\xi+a_1^2b\tanh^2\sqrt{-b}\xi,\quad b<0;
\end{aligned}$$

$$u_2 = a_0 + a_1\sqrt{b}\tan\sqrt{-b}\xi e^{i\theta},$$

$$v_2 = \frac{1}{12}(\beta^2 - \alpha^2 - \delta - 2a_0^2) - 2a_0a_1\tan\sqrt{b}\xi - a_1^2 b\tan^2\sqrt{b}\xi, \quad b > 0;$$

$$u_3 = \left(a_0 - \frac{a_1}{\xi}\right)e^{i\theta}, \quad v_3 = \frac{1}{12}(\beta^2 - \alpha^2 - \delta - 2a_0^2) + \frac{2a_0a_1}{\xi} - \frac{a_1^2}{\xi^2}, \quad b = 0,$$

其中 $\xi = x + \pm y - 2(\beta \pm \alpha)t, \quad \theta = \alpha x + \beta y + \delta t.$

$$u_4 = \pm i\sqrt{-b(1+d^2)}\tanh\sqrt{-b}\xi e^{i\theta},$$

$$v_4 = \frac{1}{12}(\beta^2 - \alpha^2 - \delta + 2b - 2d^2 b) - 2b\tanh^2\sqrt{-b}\xi, \quad b < 0;$$

$$u_5 = \pm i\sqrt{b(1+d^2)}\tan\sqrt{b}\xi e^{i\theta},$$

$$v_5 = \frac{1}{12}(\beta^2 - \alpha^2 - \delta + 2b - 2d^2 b) + 2b\tan^2\sqrt{b}\xi, \quad b > 0;$$

$$u_6 = \pm\frac{i\sqrt{1+d^2}}{\xi}e^{i\theta}, \quad v_6 = \frac{1}{12}(\beta^2 - \alpha^2 - \delta) + \frac{2}{\xi^2}, \quad b = 0,$$

其中 $\xi = x + dy - 2(\alpha - \beta d)t, \quad \theta = \alpha x + \beta y + \delta t.$

§1.3 2+1 维 KdV-Burgers 新的复线孤子解

KdV-Burgers 方程具有一般形式

$$u_t + uu_x - \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0, \tag{1.93}$$

它的 2+1 维推广为

$$(u_t + uu_x - \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx})_x + \gamma u_{yy} = 0, \tag{1.94}$$

其中 α, β 和 γ 为常数. 方程 (1.93) 和 (1.94) 做为非线性流体模型主要用于描述湍流和不稳定现象 [62,63,168]. 由于方程 (1.93) 和 (1.94) 的不可积性, 近年来, 用 Tanh 方法, 齐次平衡法等直接方法来研究它们受到人们的重视 [62,63,168], 然而, 到目前为止, 仅发现了方程 (1.93) 或 (1.94) 一种形式的孤子解, 如方程 (1.94) 的孤子解为 [62]

$$u = \frac{3\alpha^2}{25\beta}(\mathrm{sech}^2\xi \pm 2\tanh\xi \pm 2), \quad \xi = \mp\frac{\alpha}{10\beta}x + \frac{1}{2}ly + \left(\frac{3\alpha^3}{125\beta^2} \mp \frac{5l^2\beta\gamma}{2\alpha}\right)t, \tag{1.95}$$

其中 l 为任意常数. 其他类型的孤子解以及它们的直观图形一直没有得到. 在此, 我们进一步扩充推广的 Tanh 方法, 以便发现方程 (1.94) 其他类型的孤子解.

在讨论 2+1 维 KdV-Burgers 方程之前, 首先回顾一下广义 Tanh 方法 [101]. 对给定的发展方程

$$P(u, u_x, u_t, \cdots) = 0, \tag{1.96}$$

我们做变换 $u(x,t) = U(\xi), \xi = x + ct$, 并寻找相应常微分方程如下形式的解

$$u(x,t) = U(\xi) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi^i, \tag{1.97}$$

其中 $\varphi = \varphi(\xi)$ 满足带有参数 k_1 的 Riccati 方程

$$\varphi' = k_1(1 - \varphi^2), \tag{1.98}$$

其一般解为

$$\varphi = \tanh(k_1\xi), \quad \varphi = \coth(k_1\xi). \tag{1.99}$$

注意到某些方程的孤子解可能含有一阶 sech 型函数, 例如, MKdV 方程

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$$

有如下形式的孤子解

$$u = 2\lambda \mathrm{sech}(2\lambda x - 8\lambda^3 t).$$

显然, 这种解不能由上述 Tanh 方法的假设 (1.97) 得到, 这种现象启发我们用如下更一般的假设代替 (1.97)

$$u(x,t) = U(\xi) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi^i + \sqrt{k_2(1-\varphi^2)} \sum_{i=0}^{n-1} A_i \varphi^i. \tag{1.100}$$

将 (1.100) 代入相关的常微分方程, 并反复利用 (1.98), 再令 φ^i 和 $\varphi^i\sqrt{k_2(1-\varphi^2)}$ 的系数为零得到一代数方程组, 由此可确定 a_i, A_i, k_1, k_2 和 c. 这样不仅可得到原来 Tanh 和广义 Tanh 方法所得到的精确解, 而且还得到新的类型孤子解.

下面用这种方法考虑方程 (1.94), 首先做变换 $\xi = x + cy + dt$ 将方程 (1.94) 化为

$$(dU' + UU' - \alpha U'' + \beta U''')' + c^2\gamma U'' = 0. \tag{1.101}$$

平衡 UU' 与 U''' 并根据 (1.100), 可使我们做出如下假设

$$U = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + (A_0 + A_1\varphi)\sqrt{k_2(1-\varphi^2)}. \tag{1.102}$$

将 (1.102) 代入 (1.101) 并使用 Mathematica 得到关于 $a_0, a_1, a_2, A_0, A_1, k_1, k_2$, c 和 d 的一代数方程组

$$
\begin{aligned}
&a_1^2+2da_2+2c^2\gamma a_2+2a_0a_2+2\alpha a_1k_1-16\beta a_2k_1^2-A_0^2k_2+A_1^2k_2=0,\\
&12a_1a_2+24\alpha a_2k_1+24\beta a_1k_1^2-12A_0A_1k_2=0,\\
&-2da_1-2c^2\gamma a_1-2a_0a_1+6a_1a_2+16\alpha a_2k_1+16\beta a_1k_1^2-8A_0A_1k_2=0,\\
&2da_1+2c^2\gamma a_1+2a_0a_1-18a_1a_2-40\alpha a_2k_1-40\beta a_1k_1^2+20A_0A_1k_2=0,\\
&a_2^2+12\beta a_2k_1^2-A_1^2k_2=0,\\
&-4a_1^2-8da_2-8c^2\gamma a_2-8a_0a_2+6a_2^2-8\alpha a_1k_1+136\beta a_2k_1^2+4A_0^2k_2\\
&\qquad-10A_1^2k_2=0,\\
&3a_1^2+6da_2+6c^2\gamma a_2+6a_0a_2-16a_2^2+6\alpha a_1k_1-240\beta a_2k_1^2-3A_0^2k_2\\
&\qquad+19A_1^2k_2=0,\\
&dA_0-c^2\gamma A_0-a_0A_0+2a_2A_0+2a_1A_1+5\alpha A_1k_1+5\beta A_0k_1^2=0,\\
&2dA_0+2c^2\gamma A_0+2a_0A_0-13a_2A_0-13a_1A_1-28\alpha A_1k_1-28\beta A_0k_1^2=0,\\
&12a_2A_0+12a_1A_1+24\alpha A_1k_1+24\beta A_0k_1^2=0,\\
&6a_1A_0+6dA_1+6c^2\gamma A_1+6a_0A_1-25a_2A_1+6\alpha A_0k_1-180\beta A_1k_1^2=0,\\
&5a_1A_0-5dA_1-5c^2\gamma A_1-5a_0A_1+6a_2A_1-5\alpha A_0k_1+61\beta A_1k_1^2=0,\\
&a_2A_1+6\beta A_1k_1^2=0.
\end{aligned}
$$

利用 Mathematica, 我们发现两组解

$$
\left.\begin{aligned}
&a_0=-(d+c^2\gamma)+\frac{3\alpha^2}{25\beta},\quad a_1=\pm\frac{6\alpha^2}{25\beta},\quad a_2=-\frac{3\alpha^2}{25\beta},\\
&A_0=A_1=0,\quad k_1=\mp\frac{\alpha}{10\beta}.
\end{aligned}\right\}\tag{1.103}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&a_0=-(d+c^2\gamma)+\frac{6\alpha^2}{25\beta},\quad a_1=\pm\frac{6\alpha^2}{25\beta},\quad a_2=-\frac{6\alpha^2}{25\beta},\\
&A_0=\mp A_1,\quad k_1=\mp\frac{\alpha}{5\beta},\quad k_2=-\frac{36\alpha^2}{625\beta^2A_1^2}.
\end{aligned}\right\}\tag{1.104}
$$

其中 c, d 和 A_1 为任意常数.

利用 (1.103), 得到一种线孤子解

$$
u=-(d+c^2\gamma)\pm\frac{6\alpha^2}{25\beta}\tanh\xi+\frac{3\alpha^2}{25\beta}\operatorname{sech}^2\xi,\quad \xi=\mp\frac{\alpha}{10\beta}(x+cy+dt).\tag{1.105}
$$

这个解含有两个任意常数 c, d, 形式上与 (1.95) 略有不同，如选取

$$c = \mp\frac{5\beta l}{\alpha},\quad d = \pm\frac{6\alpha^2}{25\beta} - \frac{25\beta^2 l^2\gamma}{\alpha^2}.$$

则由 (1.105) 可得到 (1.95). 由 (1.104), 我们给出一种新的复线孤子解

$$\left.\begin{aligned} &u = -(d + c^2\gamma) \pm \frac{6\alpha^2}{25\beta}\tanh\xi + \frac{6\alpha^2}{25\beta}\mathrm{sech}^2\xi + i\frac{6\alpha^2}{25\beta}(1 \mp \tanh\xi)\mathrm{sech}\xi,\\ &\xi = \mp\frac{\alpha}{5\beta}(x + cy + dt). \end{aligned}\right\} \tag{1.106}$$

用类似文献 [55] 的方法，可以证明这种新的复线孤子解的实部为 2+1 维 Burgers 的冲击波解和 KdV 方程的孤波解之和；虚部为 2+1 维 Burgers 的冲击波解和 MKdV 方程孤波解之积. 复线孤子解的实部、虚部和模的渐近性由图 1.3.1~1.3.3 给出，当 t 从 $-\infty$ 趋于 $+\infty$ 时，这些图形由在 $t=-\infty$ 的极限位置渐近地运行到 $t=+\infty$ 的极限位置，这种性质类似于渐进 Standing 孤子解的性质.

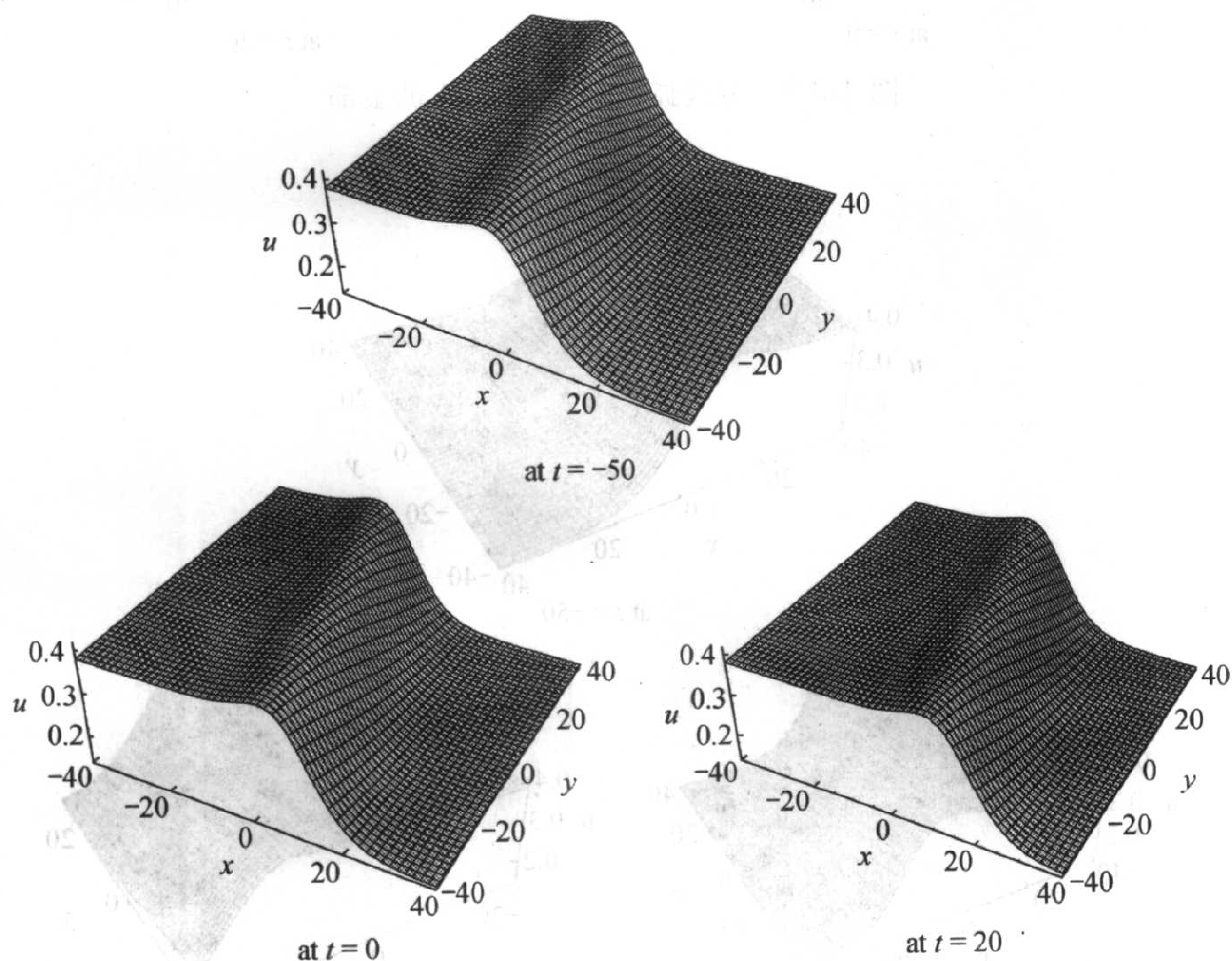


图 1.3.1 复线孤子解 $u(x,y,t)$ 的实部

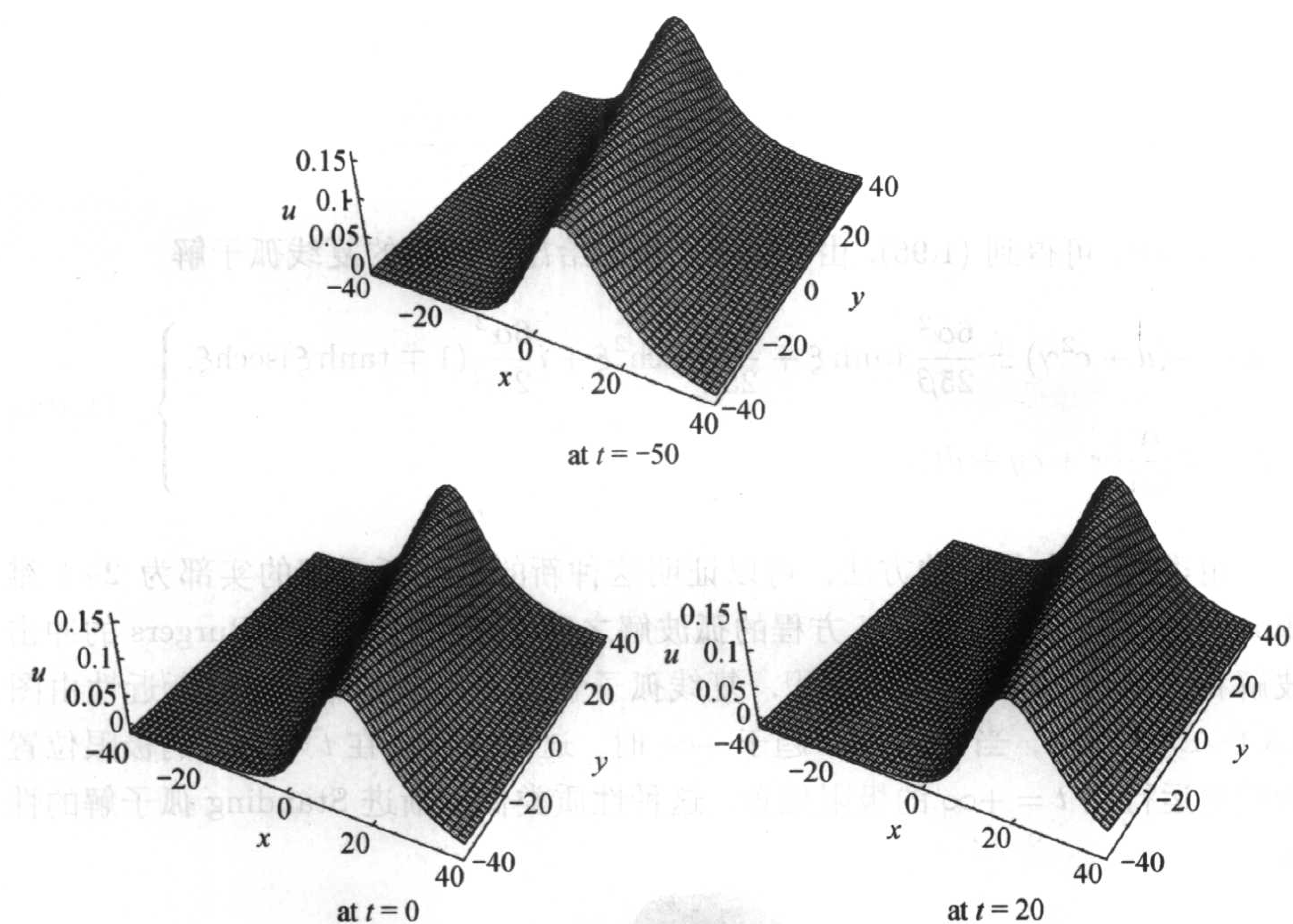


图 1.3.2 复线孤子解 $u(x,y,t)$ 的虚部

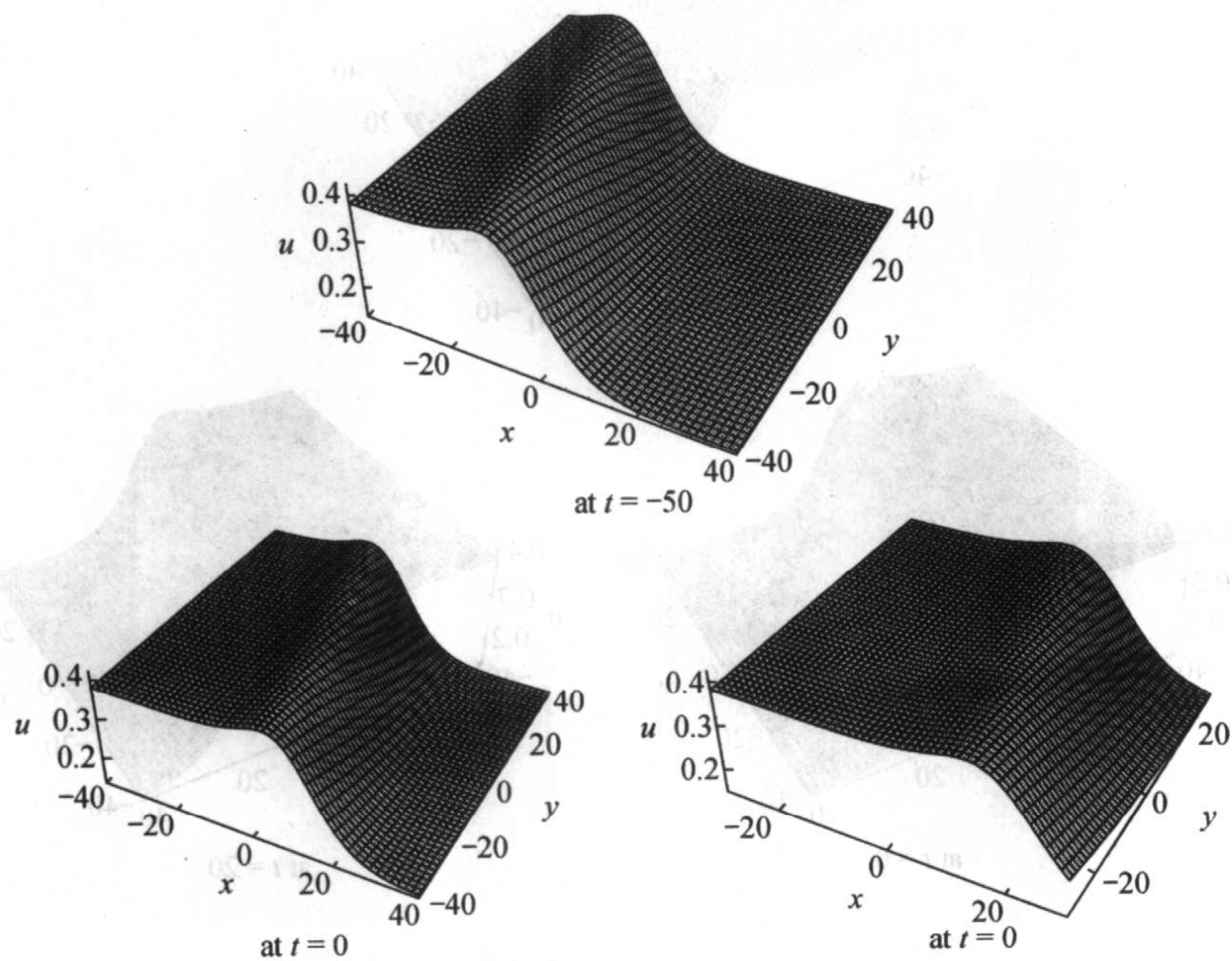


图 1.3.3 复线孤子解 $u(x,y,t)$ 的模

当取 $\gamma = 0, c = 0$ 时，上述讨论的所有结果对 1+1 维 KdV-Burgers (1.93) 仍然有效.

§1.4 非线性方程的孤子解、有理解和周期解的统一构造

§1.4.1 动机和方法

非线性方程的行波解在研究非线性波现象中起着重要作用，近年来发展了许多有效的方法，如反散射法 [42], Darboux 变换法 [2,45], Hirota 双线性法 [42], 齐次平衡法 [101,168], Tanh 方法 [51~54], 然而这些方法只能得到孤波型解. 最近

为得到双曲、三角和有理函数行波解，已有大量的工作对 Tanh 方法进行各类推广 [57,63,339~341]. 利用谱问题， Weierstrass 和 Theta 椭圆函数可用于构造 KdV, 耦合非线性 Schrödinger 等方程的周期解，但这种方法只能应用于承认 Lax 对的可积方程 [342,343]. 另外一途径是通过适当的变换，将所研究的方程转化为 Weierstrass 方程， Jacobi 方程，或更一般地， Painlevé 型方程 [344,345], 这种方法并不容易，特别是对耗散方程或非线性耦合方程. 最近，一种非常直接而有效的 Jacobi 椭圆展开法被用于构造非线性方程的周期解 [34~36], 这种方法的本质思想类似于 Tanh 方法，即将 tanh 函数代换为 Jacobi 椭圆函数，如 $\mathrm{cn}\xi$, $\mathrm{sn}\xi$, $\mathrm{dn}\xi$ 等.

在这一节，我们发展基于符号运算的一种统一的代数方法，用于构造上述各种行波解，包括孤子解、有理解、三角函数周期解、 Weierstrass 和 Jacobi 椭圆函数双周期解. 对给定的非线性方程

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, \cdots) = 0, \tag{1.107}$$

它的孤波解通常可表示为 $\mathrm{sech}\xi$ 函数或 $\tanh\xi$ 函数的多项式，而这两种函数分别满足方程

$$\varphi' = -\varphi\sqrt{1-\varphi^2}$$

和

$$\varphi' = \sqrt{1 - 2\varphi^2 + \varphi^4},$$

其中 $' = \dfrac{d}{d\xi}, \xi = x + ct$.

另一方面，方程

$$\varphi' = \pm\sqrt{-g_3 - g_2\varphi + 4\varphi^3}$$

具有 Weierstrass 椭圆函数解 $\wp(\xi, g_2, g_3)$； 而方程

$$\varphi' = \pm\sqrt{1 - (m^2+1)\varphi^2 + m^2\varphi^4}$$

具有 Jacobi 椭圆函数解 $\mathrm{sn}(\xi, m)$, 其中 m 为模数. 这些事实启发我们发展一种直接而统一的技巧构造各类行波解, 即用下列一阶微分方程代替方程 (1.3)

$$\varphi' = \varepsilon\sqrt{\sum_{j=0}^{r} c_j\varphi^j}, \tag{1.108}$$

其中 $\varepsilon = \pm 1$, r 为一正整数, $c_0, c_1, \cdots, c_r$ 为待定常数. 与 Tanh 方法或广义 Tanh 方法不同, 这种方法涉及两个平衡数 n 和 r, 在一般情况下, 平衡最高阶导数项和非线性项将给出 n 和 r 之间的一种关系, 例如, 对 MKdV 方程

$$u_t + u^2u_x + u_{xxx} = 0,$$

我们得到

$$r = 2(n+1). \tag{1.109}$$

对 Kawachara 方程

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xxx} + \beta u_{xxxxx} = 0,$$

有

$$n = 2r - 4.$$

显然, 任给一个 n 我们可得到一个 r, 从而导致一种假设, 例如, 在 (1.109) 中取 $n = 1$, 可得到 $r = 4$, 因此我们可寻找 MKdV 方程如下形式的解

$$u = a_0 + a_1\varphi, \quad \varphi' = \varepsilon\sqrt{c_0 + c_1\varphi + c_2\varphi^2 + c_3\varphi^3 + c_4\varphi^4}.$$

对 Kawachara 方程, 取 $n = 2$, $r = 3$, 我们有

$$u = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2, \quad \varphi' = \varepsilon\sqrt{c_0 + c_1\varphi + c_2\varphi^2 + c_3\varphi^3};$$

取 $n = 4$, $r = 4$, 得到

$$u = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3 + a_4\varphi^4, \quad \varphi' = \varepsilon\sqrt{c_0 + c_1\varphi + c_2\varphi^2 + c_3\varphi^3 + c_4\varphi^4}.$$

我们看到 r 随着 n 的增大而增大, 方程 (1.107) 的行波解依赖于方程 (1.108) 的可解性, 其系数满足关于 d, a_i, c_j 的某一代数方程组. n 和 r 越大, 所得到的解越一般, 但随着 n 和 r 的增大, 求解这种方程将变得越来越复杂. 目前, 我们仅考虑一种有趣的情形 $r = 4$, 即

$$\varphi' = \varepsilon\sqrt{c_0 + c_1\varphi + c_2\varphi^2 + c_3\varphi^3 + c_4\varphi^4}. \tag{1.110}$$

定理 1.4.1 方程 (1.110) 在不同情况下，具有如下各类行波解：

(i) 当 $c_3 = c_0 = c_1 = 0$ 时，方程 (1.110) 具有钟状孤子解，三角函数和有理函数解

$$\varphi = \sqrt{-\frac{c_2}{c_4}}\operatorname{sech}(\sqrt{c_2}\xi), \quad c_2 > 0, c_4 < 0; \tag{1.111}$$

$$\varphi = \sqrt{-\frac{c_2}{c_4}}\sec(\sqrt{-c_2}\xi), \quad c_2 < 0, c_4 > 0; \tag{1.112}$$

$$\varphi = -\frac{1}{\sqrt{c_4}\xi}, \quad c_2 = 0, \quad c_4 > 0. \tag{1.113}$$

(ii) 当 $c_3 = c_1 = 0, c_0 = \dfrac{c_2^2}{4c_4}$ 时，方程 (1.110) 具有扭状孤子解，三角函数和有理函数解

$$\varphi = \sqrt{-\frac{c_2}{2c_4}}\tanh\left(\sqrt{-\frac{c_2}{2}}\xi\right), \quad c_2 < 0, c_4 > 0; \tag{1.114}$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{c_2}{2c_4}}\tan\left(\sqrt{\frac{c_2}{2}}\xi\right), \quad c_2 > 0, c_4 > 0; \tag{1.115}$$

$$\varphi = -\frac{1}{\sqrt{c_4}\xi}, \quad c_2 = 0, \quad c_4 > 0. \tag{1.116}$$

(iii) 当 $c_3 = c_1 = 0$ 时，方程 (1.110) 具有三种 Jacobi 椭圆函数解

$$\varphi = \sqrt{-\frac{c_2 m^2}{c_4(2m^2-1)}}\operatorname{cn}\left(\sqrt{\frac{c_2}{2m^2-1}}\xi\right), \quad c_0 = \frac{c_2^2 m^2(m^2-1)}{c_4(2m^2-1)^2}, \quad c_2 > 0; \tag{1.117}$$

$$\varphi = \sqrt{-\frac{c_2 m^2}{c_4(m^2+1)}}\operatorname{sn}\left(\sqrt{-\frac{c_2}{m^2+1}}\xi\right), \quad c_0 = \frac{c_2^2 m^2}{c_4(m^2+1)^2}, \quad c_2 < 0; \tag{1.118}$$

以及

$$\varphi = \sqrt{\frac{-c_2}{c_4(2-m^2)}}\operatorname{dn}\left(\sqrt{\frac{c_2}{2-m^2}}\xi\right), \quad c_0 = \frac{c_2^2(1-m^2)}{c_4(2-m^2)^2}, \quad c_2 > 0.$$

当 $m \to 1$ 时，周期解 (1.117) 退化为钟状孤子解 (1.111)，周期解 (1.118) 退化为扭状孤子解 (1.114).

(iv) 当 $c_4 = c_0 = c_1 = 0$ 时，方程 (1.110) 有如下钟状孤子解，三角函数周期解和有理解

$$\varphi = -\frac{c_2}{c_3}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c_2}}{2}\xi\right), \quad c_2 > 0; \tag{1.119}$$

$$\varphi = -\frac{c_2}{c_3}\sec^2\left(\frac{\sqrt{-c_2}}{2}\xi\right), \quad c_2 < 0; \tag{1.120}$$

$$\varphi = \frac{1}{c_3\xi^2}, \quad c_2 = 0. \tag{1.121}$$

(v) 当 $c_4 = 0, c_3 > 0$ 时，方程 (1.110) 具有 Weierstrass 椭圆函数解

$$\varphi = \wp\Big(\frac{\sqrt{c_3}}{2}\xi, g_2, g_3\Big), \tag{1.122}$$

其中 $g_2 = -4c_1/c_3$, $g_3 = -4c_0/c_3$.

注释 1.4.2　与 Tanh 或推广的 Tanh 方法相比，这里提出方法的关键是用方程 (1.110) 的解代替 Tanh 函数. 当 $c_1 = c_3 = 0, c_0 = 1, c_2 = -2, c_4 = 1$，方程 (1.110) 具有解 $\tanh\xi$，此时这种方法退化为 Tanh 方法，即 Tanh 方法仅为上述方法的一个特殊情况 (1.114). 当 $c_1 = c_3 = 0, c_0 = b^2, c_2 = 2b, c_4 = 1$，方程 (1.110) 退化为 Riccati 方程

$$\varphi' = b + \varphi^2.$$

此时，上述方法退化为 §1.1 中的广义 Tanh 方法 [25,26].

§1.4.2　在可积和不可积方程中的应用

例 1.4.3　考虑 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{1.123}$$

作变换 $u(x,t) = U(\xi), \xi = x + ct$, 将方程 (1.123) 化为

$$cU' + 6UU' + U''' = 0. \tag{1.124}$$

由假设 (1.2), (1.108), 平衡 (1.24) 中的 UU' 和 U''' 得到 $r = n + 2$. 我们选取 $n = 2, r = 4$, 寻找方程如下形式的解

$$u = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2, \tag{1.125}$$

其中 φ 满足 (1.6). 借助 Mathematica, 将 (1.125) 代入 (1.124), 反复利用 (1.110) 并令 $\varphi^i\sqrt{c_0 + c_1\varphi + c_2\varphi^2 + c_3\varphi^3 + c_4\varphi^4}\ \ (i = 0, 1, 2, \cdots)$ 的系数为零，得到如下代数方程组

$$\begin{aligned}
&\varepsilon c a_1 + 6\varepsilon a_0 a_1 + 3\varepsilon^3 a_2 c_1 + \varepsilon^3 a_1 c_2 = 0,\\
&6\varepsilon a_1^2 + 2\varepsilon c a_2 + 12\varepsilon a_0 a_2 + 8\varepsilon^3 a_2 c_2 + 3\varepsilon^3 a_1 c_3 = 0,\\
&18\varepsilon a_1 a_2 + 15\varepsilon^3 a_2 c_3 + 6\varepsilon^3 a_1 c_4 = 0,\\
&12\varepsilon a_2^2 + 24\varepsilon^3 a_2 c_4 = 0.
\end{aligned}$$

由此，得到两组解

$$a_2 = c_4 = 0,\quad a_0 = -\frac{1}{6}(c+\varepsilon^2 c_2),\quad c_3 = -\frac{2a_1}{\varepsilon^2}, \tag{1.126}$$

其中 c_0, c_1, c_2, c 和 $a_1 \neq 0$ 为任意常数.

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{12}\Big(2c+\frac{3c_3^2}{a_2}+8\varepsilon^2 c_2\Big), a_1 = -\varepsilon^2 c_3,\\ c_1 &= -\frac{c_3^3+2\varepsilon^2 a_2 c_2 c_3}{2\varepsilon^2 a_2^2},\quad c_4 = -\frac{a_2}{2\varepsilon^2}, \end{aligned} \tag{1.127}$$

其中 c_0, c_2, c_3, c 和 $a_2 \neq 0$ 为任意常数.

由于 $\varepsilon = \pm 1$, 这里及下述例子中，将直接取 $\varepsilon^2 = 1$. 又由于在 (1.126) 中 $c_4 = 0$, 利用 (1.119)~(1.122), 有

$$u_1 = -\frac{1}{6}(c+c_2)+\frac{c_2}{2}\mathrm{sech}^2\Big(\frac{\sqrt{c_2}}{2}\xi\Big),\quad c_2>0;$$

$$u_2 = -\frac{1}{6}(c+c_2)+\frac{c_2}{2}\sec^2\Big(\frac{\sqrt{-c_2}}{2}\xi\Big),\quad c_2<0;$$

$$u_3 = -\frac{1}{6}c-\frac{1}{2\xi^2},\quad c_2 = 0;$$

$$u_4 = -\frac{1}{6}(c+c_2)+a_1\wp\Big(\frac{\sqrt{-2c_1}}{2}\xi, g_2, g_3\Big),$$

其中 $\xi = x+ct$, $g_2 = 2c_1/a_1$, $g_3 = 2c_0/a_1$.

在 (1.127) 取 $c_3 = 0$, 则 $a_1 = c_1 = 0$, 此时由 (1.111)~(1.116), 所得到的解在适当的变换下, 仍然与 u_1, u_2, u_3 相同. 由 (1.127) 和 (1.117)~(1.118), 得到 Jacobi 椭圆函数周期解

$$u_5 = -\frac{1}{6}(c+4c_2)+\frac{2c_2m^2}{2m^2-1}\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\frac{c_2}{2m^2-1}}\xi\right),\quad c_2>0, c_0 = \frac{(1-m^2)c_2}{2m^2-1};$$

$$u_6 = -\frac{1}{6}(c+4c_2)+\frac{2c_2m^2}{m^2+1}\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{-\frac{c_2}{m^2+1}}\xi\right),\quad c_2>0, c_0 = \frac{2m^2c_2^2}{m^2+1},$$

其中 $\xi = x+ct$.

由于当 $m \to 1$ 时，$\mathrm{sn}\xi \to \tanh\xi$, $\mathrm{cn}\xi \to \mathrm{sech}\xi$, 这两种周期解都收敛于孤子解 u_1.

例 1.4.4 对 KdV-MKdV 方程 [167,349,352]

$$u_t+(\alpha+\beta u)uu_x+u_{xxx} = 0, \tag{1.128}$$

做变换 $u(x,t)=U(\xi)$, $\xi=x+ct$, 将方程 (1.128) 化为

$$cU'+(\alpha+\beta U)UU'+U'''=0. \tag{1.129}$$

此时，平衡 U^2U' 和 U''' 得到 $r=2(n+1)$. 选取 $n=1$, $r=4$, 作如下假设

$$u=a_0+a_1\varphi, \tag{1.130}$$

其中 φ 满足 (1.110). 将 (1.130) 代入 (1.129) 得到

$$\begin{aligned}
&\varepsilon ca_1+\varepsilon\alpha a_0a_1+\varepsilon\beta a_0^2a_1+\varepsilon^3a_1c_2=0,\\
&\varepsilon\alpha a_1^2+2\varepsilon\beta a_0a_1^2+3\varepsilon a_1c_3=0,\\
&\varepsilon\beta a_1^3+6\varepsilon^3a_1c_4=0,
\end{aligned}$$

解之得

$$c_2=-c-\alpha a_0-\beta a_0^2,\quad c_3=-\frac{1}{3}(\alpha a_1+2\beta a_0a_1),\quad c_4=-\frac{1}{6}\beta a_1^2, \tag{1.131}$$

其中 $a_1\neq 0$, a_0, c 和 c_0 为任意常数.

在 (1.131) 中取 $a_0=-\alpha/(2\beta)$, 则 $c_4\neq 0$, $c_3=0$, 由 (1.111)~(1.118), 得到

$$u_1=-\frac{\alpha}{2\beta}+\frac{\sqrt{6(\alpha^2-4\beta c)}}{2\beta}\mathrm{sech}\left(\sqrt{\frac{\alpha^2-4\beta c}{4\beta}}\xi\right),\quad \alpha^2-4\beta c>0;$$

$$u_2=-\frac{\alpha}{2\beta}+\frac{1}{2\beta}\sqrt{\frac{4\beta c-\alpha^2}{2}}\tanh\left(\sqrt{\frac{4\beta c-\alpha^2}{8\beta}}\xi\right),\quad 4\beta c-\alpha^2>0;$$

$$u_3=-\frac{\alpha}{2\beta}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-\beta}\xi},\quad \alpha^2-4\beta c=0,\beta<0;$$

$$u_4=-\frac{\alpha}{2\beta}+\frac{m}{2\beta}\sqrt{\frac{6(\alpha^2-4\beta c)}{2m^2-1}}\mathrm{cn}\left(\sqrt{\frac{\alpha^2-4\beta c}{4\beta(2m^2-1)}}\xi\right),\quad \alpha^2-4\beta c>0;$$

$$u_5=-\frac{\alpha}{2\beta}+\frac{m}{2\beta}\sqrt{\frac{4\beta c-\alpha^2}{m^2+1}}\mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{4\beta c-\alpha^2}{4\beta(m^2+1)}}\xi\right),\quad \alpha^2-4\beta c<0,$$

当 $m\to 1$ 时，解 u_4 退化为 u_1, u_4 退化为 u_2.

例 1.4.5 考虑 Ito 型 5 阶 MKdV 方程 [351]

$$u_t+(6u^5-10u^2u_{xx}-10uu_x^2+u_{xxxx})_x=0. \tag{1.132}$$

令 $u(x,t)=U(\xi),\xi=x+ct$, 将方程 (1.132) 约化为

$$cU'+(6U^5-10U^2U''-10UU'^2+U^{(4)})'=0. \tag{1.133}$$

平衡 U^2U'' 与 $U^{(4)}$, 得到 $r=2(n+1)$. 选取 $n=1, r=4$, 并假设

$$U=a_0+a_1\varphi, \tag{1.134}$$

其中 φ 满足 (2.110). 将 (1.134) 代入 (1.133) 得到

$$\begin{aligned}
&2ca_0+12a_0^5-20\varepsilon^2a_0a_1^2c_0-10\varepsilon^2a_0^2a_1c_1+\varepsilon^4a_1c_1c_2+6\varepsilon^4a_1c_0c_3=0,\\
&2ca_1+60a_0^4a_1-20\varepsilon^2a_1^3c_0-40\varepsilon^2a_0a_1^2c_1-20\varepsilon^2a_0^2a_1c_2+2\varepsilon^4a_1c_2^2\\
&\quad+9\varepsilon^4a_1c_1c_3+24\varepsilon^4a_1c_0c_4=0,\\
&120a_0^3a_1^2-30\varepsilon^2a_1^3c_1-60\varepsilon^2a_0a_1^2c_2-30\varepsilon^2a_0^2a_1c_3+15\varepsilon^4a_1c_2c_3\\
&\quad+30\varepsilon^4a_1c_1c_4=0,\\
&120a_0^2a_1^3-40\varepsilon^2a_1^3c_2-80\varepsilon^2a_0a_1^2c_3+15\varepsilon^4a_1c_3^2-40\varepsilon^2a_0^2a_1c_4+40\varepsilon^4a_1c_2c_4=0,\\
&60a_0a_1^4-50\varepsilon^2a_1^3c_3-100\varepsilon^2a_0a_1^2c_4+60\varepsilon^4a_1c_3c_4=0,\\
&12a_1^5-60\varepsilon^2a_1^3c_4+48\varepsilon^4a_1c_4^2=0,
\end{aligned}$$

解之得到

$$c_1=-\frac{2a_0(4a_0^2-c_2)}{a_1},\quad c_3=4a_0a_1,c_4=a_1^2,c=-46a_0^4-2a_1^2c_0+14a_0^2c_2-c_2^2,$$

其中 a_0,c_0,c_2 和 $a_1\neq 0$ 为任意常数.

由于 $c_4>0$, 为使得 $c_3=0$, 取 $a_0=0$, 则

$$c_1=c_3=0,\quad c=-2a_1^2c_0-c_2^2,\quad c_4=a_1^2. \tag{1.135}$$

由 (1.111), (1.112), (1.114) 和 (1.115), 得到

$$\begin{aligned}
&u_1=\sqrt{-c_2}\sec(\sqrt{-c_2}\xi),\quad c_2<0;\\
&u_2=-\frac{1}{x-2a_1^2c_0t},\quad c_2=0;\\
&u_3=\sqrt{\frac{-c_2}{2}}\tanh\left(\sqrt{\frac{-c_2}{2}}\xi\right);\\
&u_4=\sqrt{\frac{-c_2m^2}{m^2+1}}\mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{-c_2}{m^2+1}}\xi\right),\quad c_2<0,
\end{aligned}$$

其中 $\xi=x-(2a_1^2c_0+c_2^2)t$.

当 $m\to 1$, 周期解 u_4 收敛于扭状孤子解 u_3.

例 1.4.6　考虑 Broer-Kaup 方程 [352,353]

$$\left.\begin{aligned}&u_t+uu_x+v_x=0,\\&v_t+u_x+(uv)_x+u_{xxx}=0.\end{aligned}\right\}\tag{1.136}$$

做变换 $u=U(\xi),v=V(\xi),\xi=x+ct$, 则方程 (1.136) 约化为

$$\left.\begin{aligned}&cU'+UU'+V'=0,\\&cV'+U'+(UV)'+U'''=0.\end{aligned}\right\}\tag{1.137}$$

假设

$$U=\sum_{i=0}^{n_1}a_i\varphi^i,\quad V=\sum_{j=0}^{n_2}b_j\varphi^j,$$

其中 φ 满足方程 (1.108). 平衡 VV'' 与 V^3 给出 $n_2=2n_1$, $r=2(n_1+1)$. 我们选取 $n_1=1,n_2=2,r=4$, 从而有

$$U=a_0+a_1\varphi,\quad V=b_0+b_1\varphi+b_2\varphi^2.\tag{1.138}$$

将 (1.138) 代入 (1.137) 并利用 Mathematica 得到

$$\begin{aligned}&\varepsilon ca_1+\varepsilon a_0a_1+\varepsilon b_1=0,\\&\varepsilon a_1^2+2\varepsilon b_2=0,\\&\varepsilon a_1+\varepsilon a_1b_0+\varepsilon cb_1+\varepsilon a_0b_1+\varepsilon^3a_1c_2=0,\\&2\varepsilon a_1b_1+2\varepsilon cb_2+2\varepsilon a_0b_2+3\varepsilon^3a_1c_3=0,\\&3\varepsilon a_1b_2+6\varepsilon^3a_1c_4=0.\end{aligned}$$

方程组具有解

$$a_0=-c-\frac{b_1}{a_1},\quad b_2=-\frac{1}{2}a_1^2,\quad b_0=-1+\frac{b_1^2}{a_1^2}-c_2,\quad c_3=-b_1,\quad c_4=a_1^2/4,\tag{1.139}$$

其中 $a_1\neq 0,b_1,c_0$ 和 c_2 为任意常数.

令 $b_1=0$, 则有 $c_3=0$. 此时由 (1.111)~(1.118), 得到

$$
\begin{aligned}
&u_1=-c+2\sqrt{-c_2}\sec(\sqrt{-c_2}\xi),\quad v_1=-1+c_2\tan^2(\sqrt{-c_2}\xi);\\
&u_2=-c-\frac{2}{\xi},\quad v_2=-1-c_2-\frac{1}{\xi^2};\\
&u_3=-c+2\sqrt{-2c_2}\tanh\left(\sqrt{-\frac{c_2}{2}}\xi\right);\\
&v_3=-1-c_2\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{-\frac{c_2}{2}}\xi\right);\\
&u_4=-c+2\sqrt{-\frac{c_2m^2}{m^2+1}}\mathrm{sn}\left(\sqrt{-\frac{c_2}{m^2+1}}\xi\right);\\
&v_4=-1-c_2+\frac{2c_2m^2}{m^2+1}\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{-\frac{c_2}{m^2+1}}\xi\right).
\end{aligned}
$$

当 $m\to 1$ 时, 周期解 (u_4,v_4) 退化为孤子解 (u_3,v_3).

例 1.4.7 考虑广义 Hirota-Satsuma 耦合方程 [214,215]

$$
\begin{aligned}
&u_t=\frac{1}{4}u_{xxx}+3uu_x+3(v^2+w)_x,\\
&v_t=-\frac{1}{2}v_{xxx}-3uv_x,\\
&w_t=-\frac{1}{2}w_{xxx}-3uw_x.
\end{aligned}
\tag{1.140}
$$

该方程首先由 Satsuma 和 Hirota 引入, 并发现了 3- 孤子解 [215]. 令 $w=0$, $x\to\sqrt{2}x$, $t\to\sqrt{2}t$, 则方程 (1.140) 化为 Hirota-Satsuma 耦合 KdV 方程.

做变换 $u(x,t)=U(\xi)$, $v(x,t)=V(\xi)$, $w(x,t)=W(\xi)$, $\xi=x+ct$, 将 (1.140) 化为

$$
\begin{aligned}
&cU'=\frac{1}{4}U'''+3UU'+3(-V^2+W)'=0,\\
&cV'=-\frac{1}{2}V'''-3UV',\\
&cW'=-\frac{1}{2}W'''-3UW'.
\end{aligned}
\tag{1.141}
$$

假设

$$
U=\sum_{i=0}^{n_1}a_i\varphi^i,\quad V=\sum_{i=0}^{n_2}b_i\varphi^i,\quad W=\sum_{i=0}^{n_3}c_i\varphi^i,
$$

其中 φ 满足 (1.108). 平衡最高导数项和非线性项, 可知 $r=n_1+2, n_2\le n_1, n_3\le 2n_1$, 因此选取 $r=4, n_1=n_2=n_3=2$, 则有

$$
U=a_0+a_1\varphi+a_2\varphi^2,\quad V=b_0+b_1\varphi+b_2\varphi^2, W=d_0+d_1\varphi+d_2\varphi^2. \tag{1.142}
$$

将 (1.142) 代入 (1.141), 得到

$$
\begin{aligned}
&4\varepsilon ca_1 - 12\varepsilon a_0a_1 + 24\varepsilon b_0b_1 - 3\varepsilon^3 a_2c_1 - \varepsilon^3 a_1c_2 - 12\varepsilon d_1 = 0,\\
&-12\varepsilon a_1^2 + 8\varepsilon ca_2 - 24\varepsilon a_0a_2 + 24\varepsilon b_1^2 + 48\varepsilon b_0b_2 - 8\varepsilon^3 a_2c_2 - 3\varepsilon^3 a_1c_3\\
&\quad -24\varepsilon d_2 = 0,\\
&-36\varepsilon a_1a_2 + 72\varepsilon b_1b_2 - 15\varepsilon a_2c_3 - 6\varepsilon^3 a_1c_4 = 0,\\
&-24\varepsilon a_2^2 + 48\varepsilon b_2^2 - 24\varepsilon^3 a_2c_4 = 0,\\
&2\varepsilon cb_1 + 6\varepsilon a_0b_1 + 3\varepsilon^3 b_2c_1 + \varepsilon^3 b_1c_2 = 0,\\
&6\varepsilon a_1b_1 + 4\varepsilon cb_2 + 12\varepsilon a_0b_2 + 8\varepsilon^3 b_2c_2 + 3\varepsilon^3 b_1c_3 = 0,\\
&6\varepsilon a_2b_1 + 12\varepsilon a_1b_2 + 15\varepsilon^3 b_2c_3 + 6\varepsilon^3 b_1c_4 = 0,\\
&12\varepsilon a_2b_2 + 24\varepsilon^3 b_2c_4 = 0,\\
&2\varepsilon cd_1 + 6\varepsilon a_0d_1 + \varepsilon^3 c_2d_1 + 3\varepsilon^3 c_1d_2 = 0,\\
&6\varepsilon a_1d_1 + 3\varepsilon^3 c_3d_1 + 4\varepsilon cd_2 + 12\varepsilon a_0d_2 + 8\varepsilon^3 c_2d_2 = 0,\\
&6\varepsilon a_2d_1 + 6\varepsilon^3 c_4d_1 + 12\varepsilon a_1d_2 + 15\varepsilon^3 c_3d_2 = 0,\\
&12\varepsilon a_2d_2 + 24\varepsilon^3 c_4d_2 = 0.
\end{aligned}
$$

利用 Mathematica, 得到

$$
\begin{aligned}
&c_3 = c_1 = a_1 = b_1 = d_1 = 0,\quad a_0 = -\frac{1}{3}(c+2c_2),\quad c_4 = -\frac{1}{2}a_2\\
&b_2 = \pm\frac{1}{2}a_2,\quad d_2 = \frac{1}{3}a_2(2c \pm 3b_0 + c_2);
\end{aligned}
\tag{1.143}
$$

$$
\begin{aligned}
&c_4 = a_2 = b_2 = d_2 = 0,\quad a_0 = -\frac{1}{6}(2c+c_2),\quad c_3 = -2a_1,\\
&b_1 = \pm\frac{1}{2}a_1,\quad d_1 = \frac{1}{12}a_1(8c \pm 12b_0 + c_2);
\end{aligned}
\tag{1.144}
$$

$$
\begin{aligned}
&c_3 = a_1 = b_2 = d_2 = 0,\quad a_0 = -\frac{ca_2 + b_1^2}{a_2},\quad c_4 = -a_2,\\
&c_2 = \frac{4ca_2 + 6b_1^2}{a_2},\quad d_2 = \frac{1}{8}(16b_0b_1 - 2a_2c_1).
\end{aligned}
\tag{1.145}
$$

由 (1.111)~(1.118) 和 (1.143), 有

$$
\begin{aligned}
&u_1 = -\frac{1}{3}(c+2c_2) + 2c_2\mathrm{sech}^2(\sqrt{c_2}\xi),\\
&v_1 = b_0 \pm c_2\mathrm{sech}^2(\sqrt{c_2}\xi),\\
&w_1 = d_0 + \frac{2}{3}(2c \pm 3b_0 + c_2)\mathrm{sech}^2(\sqrt{c_2}\xi), c_2 > 0;
\end{aligned}
$$

$$u_2 = -\frac{1}{3}(c + 2c_2) + 2c_2\mathrm{sec}^2(\sqrt{-c_2}\xi),$$
$$v_2 = b_0 \pm c_2\mathrm{sec}^2(\sqrt{-c_2}\xi),$$
$$w_2 = d_0 + \frac{2}{3}(2c \pm 3b_0 + c_2)\mathrm{sec}^2(\sqrt{-c_2}\xi), c_2 < 0;$$
$$u_3 = -\frac{1}{3}c - \frac{2}{\xi^2}, \quad v_3 = b_0 \pm \frac{1}{\xi^2},$$
$$w_3 = d_0 + \frac{4c \pm 6b_0}{3\xi^2}, \quad c_2 = 0;$$
$$u_4 = -\frac{1}{3}(c + 2c_2) - \frac{2c_2m^2}{2m^2 - 1}\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\frac{c_2m^2}{2m^2 - 1}}\xi\right),$$
$$v_4 = b_0 \pm \frac{c_2m^2}{2m^2 - 1}\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\frac{c_2m^2}{2m^2 - 1}}\xi\right),$$
$$w_4 = d_0 + \frac{2}{3}(2c \pm 3b_0 + c_2)\frac{m^2}{2m^2 - 1}\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\frac{c_2m^2}{2m^2 - 1}}\xi\right), \quad c_2 > 0;$$
$$u_5 = -\frac{1}{3}(c + 2c_2) - \frac{2c_2m^2}{m^2 + 1}\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{-\frac{c_2m^2}{m^2 + 1}}\xi\right),$$
$$v_5 = b_0 \pm \frac{c_2m^2}{m^2 + 1}\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{-\frac{c_2m^2}{m^2 + 1}}\xi\right),$$
$$w_5 = d_0 + \frac{2}{3}(2c \pm 3b_0 + c_2)\frac{m^2}{m^2 + 1}\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{-\frac{c_2m^2}{m^2 + 1}}\xi\right), \quad c_2 < 0.$$

当 $m \to 1$ 时, 周期解 (u_4, v_4, w_4) 和 (u_5, v_5, w_5) 都收敛于孤子解 (u_1, v_1, w_1).

(1.119)~(1.121) 和 (1.144) 将产生相同类型的解 u_i, v_i, w_i $(i = 1, 2, 3)$. 由 (1.122) 和 (1.144), 得到 Weierstrass 椭圆函数解

$$u_6 = -\frac{1}{6}(2c + c_2) + a_1\wp\left(\sqrt{-\frac{a_1}{2}}\xi, g_2, g_3\right),$$
$$v_6 = b_0 \pm \frac{1}{2}a_1\wp\left(\sqrt{-\frac{a_1}{2}}\xi, g_2, g_3\right),$$
$$w_6 = d_0 + \frac{1}{12}(8c \pm 12b_0 + c_2)c_2a_1\wp\left(\sqrt{-\frac{a_1}{2}}\xi, g_2, g_3\right), c_2 > 0,$$

其中 $g_2 = 2c_1/a_1, g_3 = 2c_0/a_1$.

在 (1.145) 中, 取 $c_1 = 0$, 则由 (1.111)~(1.118), 得到

$$u_7 = -\frac{ca_2 + b_1^2}{a_2} + \frac{4ca_2 + 6b_1^2}{a_2}\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{4ca_2 + 6b_1^2}{a_2}}\xi\right),$$

$$v_7 = b_0 + \frac{b_1\sqrt{4ca_2+6b_1^2}}{a_2}\mathrm{sech}\left(\sqrt{\frac{4ca_2+6b_1^2}{a_2}}\xi\right),$$

$$w_7 = d_0 + \frac{2b_0b_1\sqrt{4ca_2+6b_1^2}}{a_2}\mathrm{sech}\left(\sqrt{\frac{4ca_2+6b_1^2}{a_2}}\xi\right),$$

$$u_8 = -\frac{ca_2+b_1^2}{a_2} + \frac{4ca_2+6b_1^2}{a_2}\sec^2\left(\sqrt{-\frac{4ca_2+6b_1^2}{a_2}}\xi\right),$$

$$v_8 = b_0 + \frac{b_1\sqrt{4ca_2+6b_1^2}}{a_2}\sec\left(\sqrt{-\frac{4ca_2+6b_1^2}{a_2}}\xi\right),$$

$$w_8 = d_0 + \frac{2b_0b_1\sqrt{4ca_2+6b_1^2}}{a_2}\sec\left(\sqrt{-\frac{4ca_2+6b_1^2}{a_2}}\xi\right), \quad \frac{4ca_2+6b_1^2}{a_2} < 0,$$

$$u_9 = \frac{1}{3}c - \frac{1}{\xi^2}, \quad v_9 = b_0 - \frac{b_1}{\sqrt{-a_2}\xi}, \quad w_9 = d_0 - \frac{2b_0b_1}{\sqrt{-a_2}\xi^2}, \quad \frac{4ca_2+6b_1^2}{a_2} = 0,$$

$$u_{10} = -\frac{ca_2+b_1^2}{a_2} - \frac{2m^2(2ca_2+3b_1^2)}{a_2(2m^2-1)}\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\frac{2m^2(2ca_2+3b_1^2)}{a_2(2m^2-1)}}\xi\right),$$

$$v_{10} = b_0 + b_1\sqrt{\frac{2m^2(2ca_2+3b_1^2)}{a_2^2(2m^2-1)}}\mathrm{cn}\left(\sqrt{\frac{2m^2(2ca_2+3b_1^2)}{a_2(2m^2-1)}}\xi\right),$$

$$w_{10} = d_0 + 2b_0b_1\sqrt{\frac{2m^2(2c+3b_1^2)}{a_2^2(2m^2-1)}}\mathrm{cn}\left(\sqrt{\frac{2m^2(2c+3b_1^2)}{a_2(2m^2-1)}}\xi\right), \frac{4ca_2+6b_1^2}{a_2} > 0;$$

$$u_{11} = -\frac{ca_2+b_1^2}{a_2} - \frac{2m^2(2ca_2+3b_1^2)}{a_2(m^2+1)}\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{-\frac{2m^2(2ca_2+3b_1^2)}{a_2(m^2+1)}}\xi\right),$$

$$v_{11} = b_0 + b_1\sqrt{\frac{2m^2(2c+3b_1^2)}{a_2(m^2+1)}}\mathrm{sn}\left(\sqrt{-\frac{2m^2(2ca_2+3b_1^2)}{a_2(m^2+1)}}\xi\right),$$

$$w_{11} = d_0 + 2b_0b_1\sqrt{-\frac{2m^2(2ca_2+3b_1^2)}{a_2(2m^2-1)}}\mathrm{sn}\left(\sqrt{-\frac{2m^2(2c+3b_1^2)}{a_2(m^2+1)}}\xi\right), \frac{4ca_2+6b_1^2}{a_2} < 0,$$

$$u_{12} = -\frac{ca_2+b_1^2}{a_2} - \frac{2ca_2+3b_1^2}{a_2}\tanh^2\left(\sqrt{-\frac{2ca_2+3b_1^2}{a_2}}\xi\right),$$

$$v_{12} = b_0 + b_1\sqrt{\frac{2ca_2+3b_1^2}{a_2}}\tanh\left(\sqrt{-\frac{2ca_2+3b_1^2}{a_2}}\xi\right),$$

$$w_{12} = d_0 + 2b_0b_1\sqrt{\frac{2ca_2+3b_1^2}{a_2}}\tanh\left(\sqrt{-\frac{2ca_2+3b_1^2}{a_2}}\xi\right), \frac{4ca_2+6b_1^2}{a_2} < 0.$$

当 $m \to 1$ 时,周期解 (u_{10}, v_{10}, w_{10}) 退化为孤子解 (u_7, v_7, w_7), 而 (u_{11}, v_{11}, w_{11}) 退化为 (u_{12}, v_{12}, w_{12}).

§1.4.3 在特殊类型方程中的应用

例 1.4.8 考虑双 Sine-Gordon 方程

$$u_{xt} = \sin u + \sin(2u). \tag{1.146}$$

作变换 $v = e^{iu}$, $v = V(\xi)$, $\xi = x + ct$, 将方程 (1.146) 化为

$$2c(VV'' - V'^2) - V^4 - V^3 + V + 1 = 0. \tag{1.147}$$

平衡 VV'' 与 V^4 得到 $r = 2(n+1)$, 从而可假设

$$V = a_0 + a_1\varphi, \tag{1.148}$$

其中 φ 满足方程 (1.110).

将 (1.148) 代入 (1.147), 得到

$$\begin{aligned}
&1 + a_0 - a_0^3 - a_0^4 - 2\varepsilon ca_1^2c_0 + \varepsilon^2 ca_0a_1c_1 = 0,\\
&a_1 - a_0^2a_1 - 4a_0^3a_1 - \varepsilon^2 ca_1^2c_1 + 2\varepsilon^2 ca_0a_1c_2 = 0,\\
&-3a_0a_1^2 - 6a_0^2a_1^2 + 3\varepsilon^2 ca_0a_1c_3 = 0,\\
&-a_1^3 - 4a_0a_1^3 + \varepsilon^2 ca_1^2c_3 + 4\varepsilon^2 ca_0a_1c_4 = 0,\\
&-a_1^4 + 2\varepsilon^2 ca_1^2c_4 = 0,
\end{aligned}$$

解之得

$$\begin{aligned}
&c_0 = \frac{1 + a_0 - a_0^3 - a_0^4 + a_0a_1cc_1}{2ca_1^2}, c_2 = \frac{-1 + 3a_0^2 + 4a_0^3 + ca_1c_1}{2ca_0},\\
&c_3 = \frac{a_1 + 2a_0a_1}{c}, c_4 = \frac{a_1^2}{2c}.
\end{aligned} \tag{1.149}$$

取 $a_0 = -1/2, c_1 = 0$, 则由 (1.149) 化为

$$c_3 = 0, \quad c_0 = \frac{9}{32ca_1^2}, \quad c_2 = -\frac{3}{4c}, \quad c_4 = \frac{a_1^2}{2c}. \tag{1.150}$$

由 (1.111), (1.112), (1.117), (1.118), 得到方程 (1.146) 的解为

$$u=\arccos\left(\frac{v_i+v_i^{-1}}{2}\right)\quad (i=1,2,\cdots,5),$$

其中

$$\begin{aligned}
v_1&=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{sech}\left(\sqrt{-\frac{3}{4c}}\xi\right),\quad c<0;\\
v_2&=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}\sec\left(\sqrt{\frac{3}{4c}}\xi\right),\quad c>0;\\
v_3&=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3m^2}{2(2m^2-1)}}\operatorname{cn}\left(\sqrt{-\frac{3}{4c(2m^2-1)}}\xi\right),\quad c<0;\\
v_4&=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3m^2}{2(m^2+1)}}\operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{3}{4c(m^2+1)}}\xi\right),\quad c>0;\\
v_5&=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\tanh\left(\sqrt{\frac{3}{8c}}\xi\right),\quad c>0,
\end{aligned}$$

其中 $\xi=x+ct$.

例 1.4.9 对 Dodd-Bullough-Mikhailov 方程

$$u_{xt}+pe^u+qe^{-2u}=0,$$

利用类似于例 1.4.8 的方法，可得到

$$u=\ln v,$$

其中

$$\begin{aligned}
v_1&=-c_2c\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c_2}}{2}\xi\right),\quad c_2>0;\\
v_2&=-c_2c\sec^2\left(\frac{\sqrt{-c_2}}{2}\xi\right),\quad c_2<0;\\
v_3&=-\frac{c}{\xi^2},\quad c_2=0;\\
v_4&=\wp\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{a_1}{c}}\xi,g_2,g_3\right),
\end{aligned}$$

而 $g_2=0,g_3-4c_0/c_3,\xi=x+ct$.

例 1.4.10 Hirota 方程为 [355]

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u + i\alpha u_{xxx} + 6i\alpha|u|^2u_x = 0. \tag{1.151}$$

当 $\alpha = 0$ 时，该方程化为 Schrödinger 方程.

令 $u = e^{i\theta}U(\xi)$，$\theta = px + qt$，$\xi = x + ct$, 则方程 (1.151) 化为

$$\begin{aligned}&(c + 2p - 3\alpha p^2)U' + 6\alpha U^2U' + \alpha U''' = 0,\\&(\alpha p^3 - q - p^2)U + 2(1 - 3\alpha p)U^3 + (1 - 3\alpha p)U'' = 0.\end{aligned} \tag{1.152}$$

通过平衡最高导数项和非线性项，可做如下假设

$$U = a_0 + a_1\varphi. \tag{1.153}$$

将 (1.153) 代入 (1.152) 并利用 Mathematica 得到

$$\begin{aligned}&\varepsilon ca_1 + 2\varepsilon pa_1 - 3\varepsilon p^2\alpha a_1 + 6\varepsilon ra_0^2a_1 + \varepsilon^3\alpha a_1c_2 = 0,\\&12\varepsilon\alpha a_0a_1^2 + 3\varepsilon^3\alpha a_1c_3 = 0,\\&6\varepsilon\alpha a_1^3 + 6\varepsilon^3\alpha a_1c_4 = 0,\\&-2p^2a_0 - 2qa_0 + 2p^3\alpha a_0 + 4a_0^3 - 12pra_0^3 + \varepsilon^2a_1c_1 - 3\varepsilon^2p\alpha a_1c_1 = 0,\\&-2p^2a_1 - 2qa_1 + 2p^2\alpha a_1 + 12a_0^2a_1 - 36p\alpha a_0^2a_1 + 2\varepsilon^2a_1c_2 - 6\varepsilon^2p\alpha a_1c_2 = 0,\\&12a_0a_1^2 - 36p\alpha a_0a_1^2 + 3\varepsilon^2a_1c_3 - 9\varepsilon^2p\alpha a_1c_3 = 0,\\&4a_1^3 - 12p\alpha a_1^3 + 4\varepsilon^2a_1c_4 - 12\varepsilon^2p\alpha a_1c_4 = 0.\end{aligned}$$

利用 Mathematica, 给出

$$\begin{aligned}&c_3 = -4a_0a_1,\quad c_4 = -a_1^2,\quad q = -\frac{2}{27\alpha^2},\quad p = \frac{1}{3\alpha},\\&c = -\frac{1}{3\alpha}(1 + 18\alpha^2a_0^2 + 3\alpha^2c_2),\end{aligned}$$

其中 a_0, c_0, c_1 和 $a_1 \neq 0$ 为任意常数.

令 $a_0 = c_1 = 0$, 则

$$c_3 = 0,\quad c_4 = -a_1^2,\quad q = -\frac{2}{27\alpha^2},\quad p = \frac{1}{3\alpha},\quad c = -\frac{1}{3\alpha}(1 + 3\alpha^2c_2), \tag{1.154}$$

利用 (1.111)~(1.118) 和 (2.154), 得到

$$u_1 = \sqrt{c_2}e^{i\theta}\text{sech}(\sqrt{c_2}\xi),\quad c_2 > 0;$$

$$u_2 = \sqrt{-c_2}e^{i(\theta+\pi/2)}\sec(\sqrt{-c_2}\xi), \quad c_2 < 0,$$

其中 $\theta = \dfrac{1}{3\alpha}x - \dfrac{2}{27\alpha^2}t,\ \xi = x - \dfrac{1}{3\alpha}(1+3\alpha^2 c_2)t;$

$$u_3 = -\frac{e^{i(\theta+\pi/2)}}{\xi}, \quad c_2 = 0,$$

其中 $\theta = \dfrac{1}{3\alpha}x - \dfrac{2}{27\alpha^2}t,\ \xi = x - \dfrac{1}{3\alpha}t.$

$$u_4 = e^{i\theta}\sqrt{\frac{c_2 m^2}{2m^2-1}}\mathrm{cn}\left(\sqrt{\frac{c_2}{2m^2-1}}\xi\right), \quad c_2 > 0;$$

$$u_5 = e^{i\theta}\sqrt{-\frac{c_2 m^2}{m^2+1}}\mathrm{sn}\left(\sqrt{-\frac{c_2}{m^2+1}}\xi\right), \quad c_2 < 0;$$

$$u_6 = e^{i\theta}\sqrt{-\frac{c_2}{2}}\tanh\left(\sqrt{-\frac{c_2}{2}}\xi\right), \quad c_2 < 0,$$

其中 $\theta = \dfrac{1}{3\alpha}x - \dfrac{2}{27\alpha^2}t,\ \xi = x - \dfrac{1}{3\alpha}(1+3\alpha^2 c_2)t.$

当 $m \to 1$ 时，周期解 u_4 退化为孤子解 u_1，而 u_5 退化为 u_2. 我们作出 Hirota 方程解的图形来说明这些解的性质. 孤子解 u_1 和 u_2 在图 1.4.1 图 1.4.2 给出. Jacobi 双周期解 u_4, u_5 和 u_6 在图 1.4.3~1.4.5 给出.

例 1.4.11　考虑耦合 Schrödinger-KdV 方程

$$\begin{aligned} &iu_t = u_{xx} + uv, \\ &v_t + 6vv_x + v_{xxx} = (|u|^2)_x. \end{aligned} \tag{1.155}$$

作变换

$$u = e^{i\theta}U(\xi), \quad v = V(\xi), \quad \theta = px + qt, \quad \xi = x + ct, \tag{1.156}$$

其中 p, q 和 c 为常数.

将 (1.156) 代入 (1.155), 发现 $c = 2p$, 而 U, V 满足下列耦合常微分方程

$$\begin{aligned} &U'' + (q-p^2)U + UV = 0, \\ &2pV' + 6VV' + V''' - (U^2)' = 0. \end{aligned} \tag{1.157}$$

通过平衡最高导数项和非线性项，可假设

$$U = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2, \quad V = b_0 + b_1\varphi + b_2\varphi^2. \tag{1.158}$$

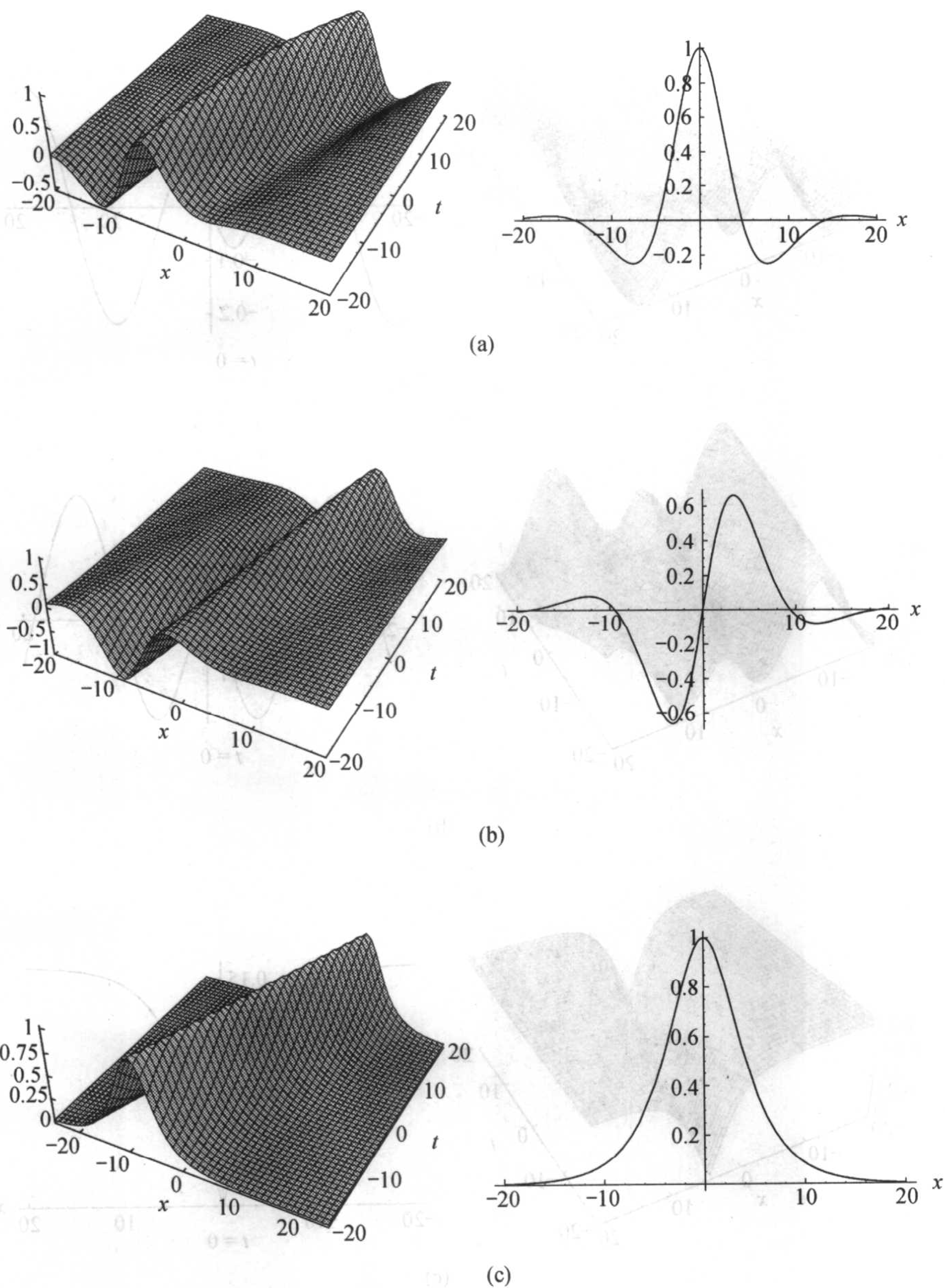
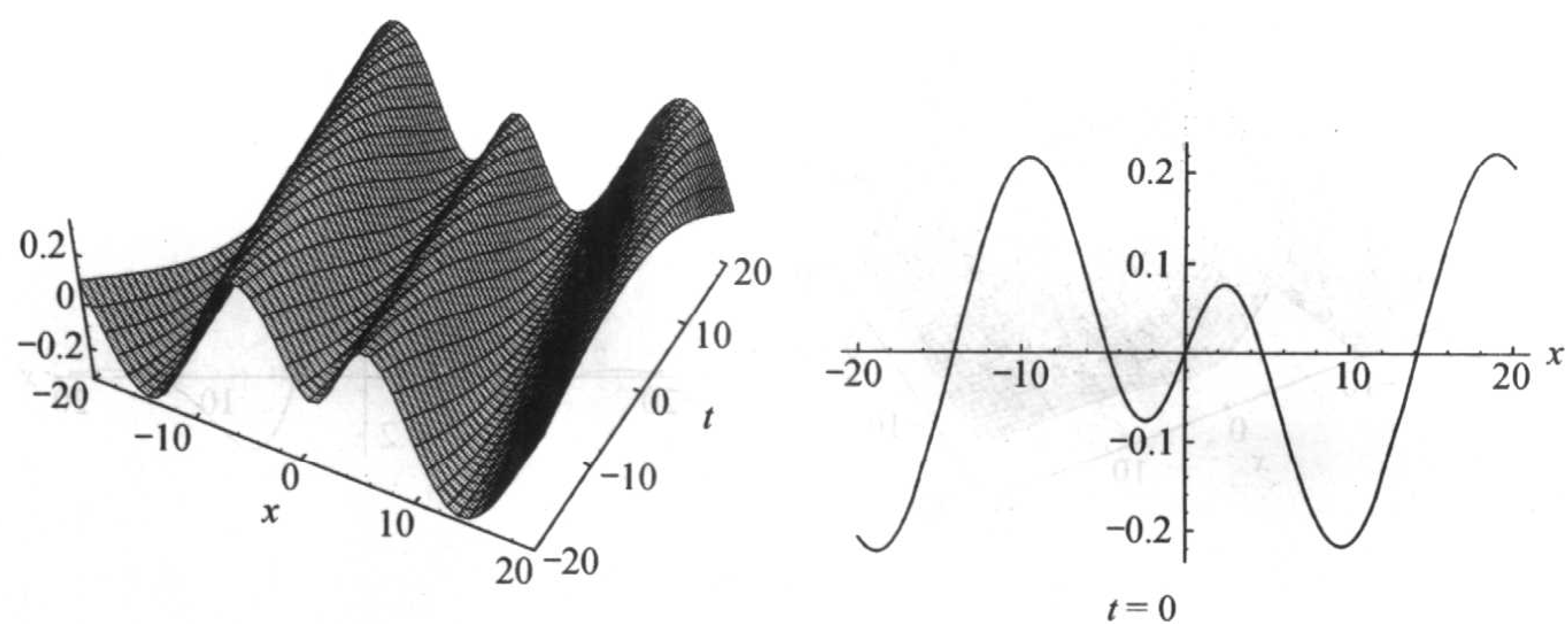
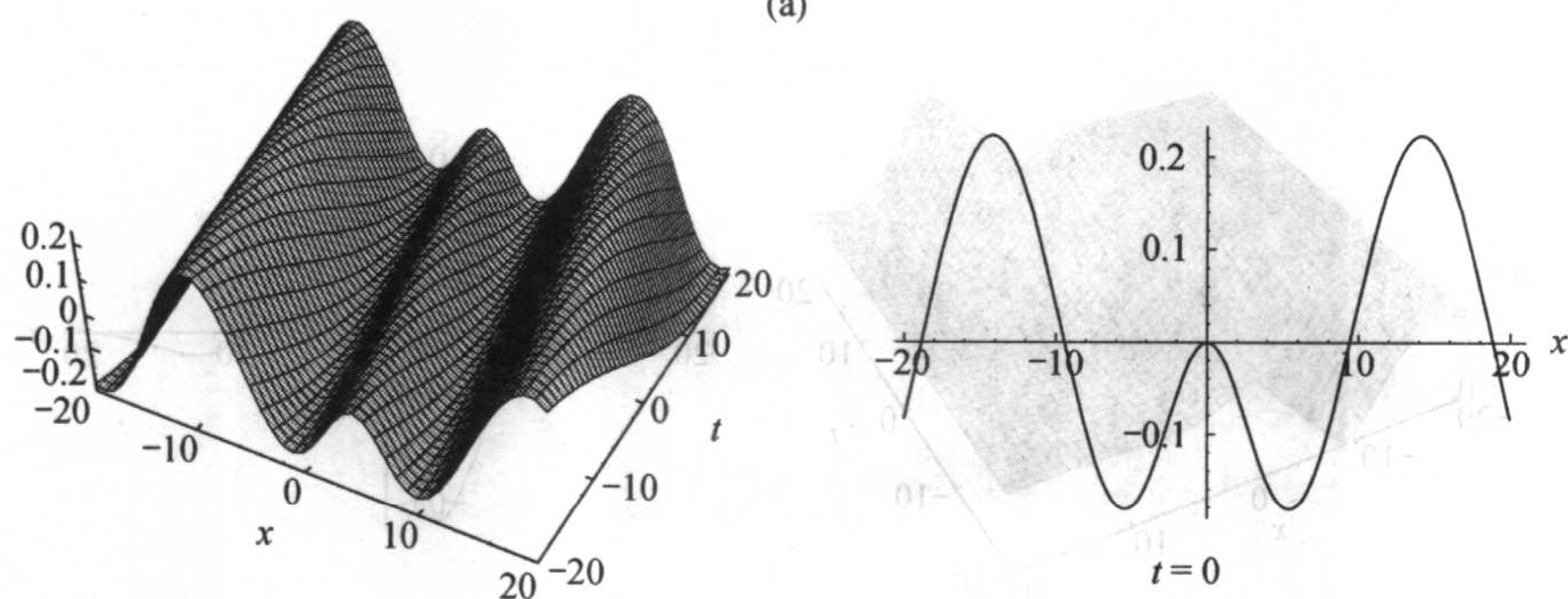


图 1.4.1 孤子解 u_1 及其在 $t=0$ 的状态，其中参数 $\alpha=1, c_2=0.1$

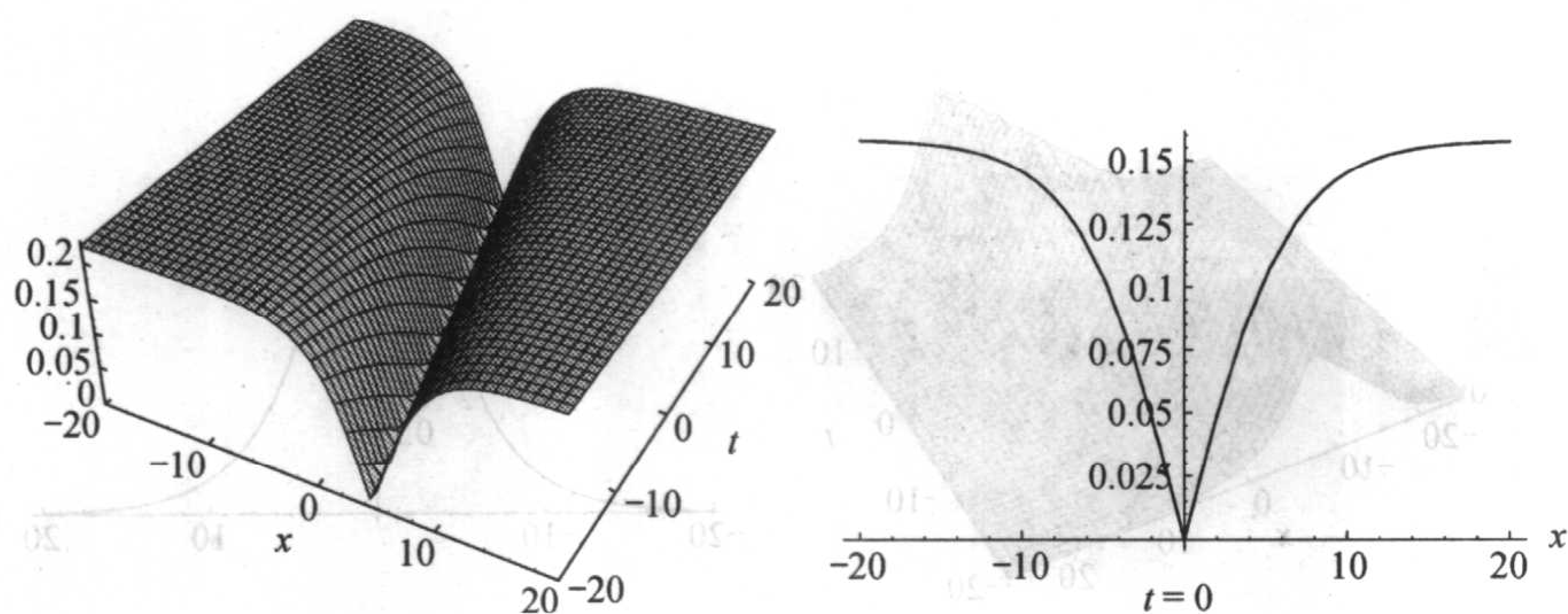
(a) 实部；(b) 虚部；(c) 模



(a)



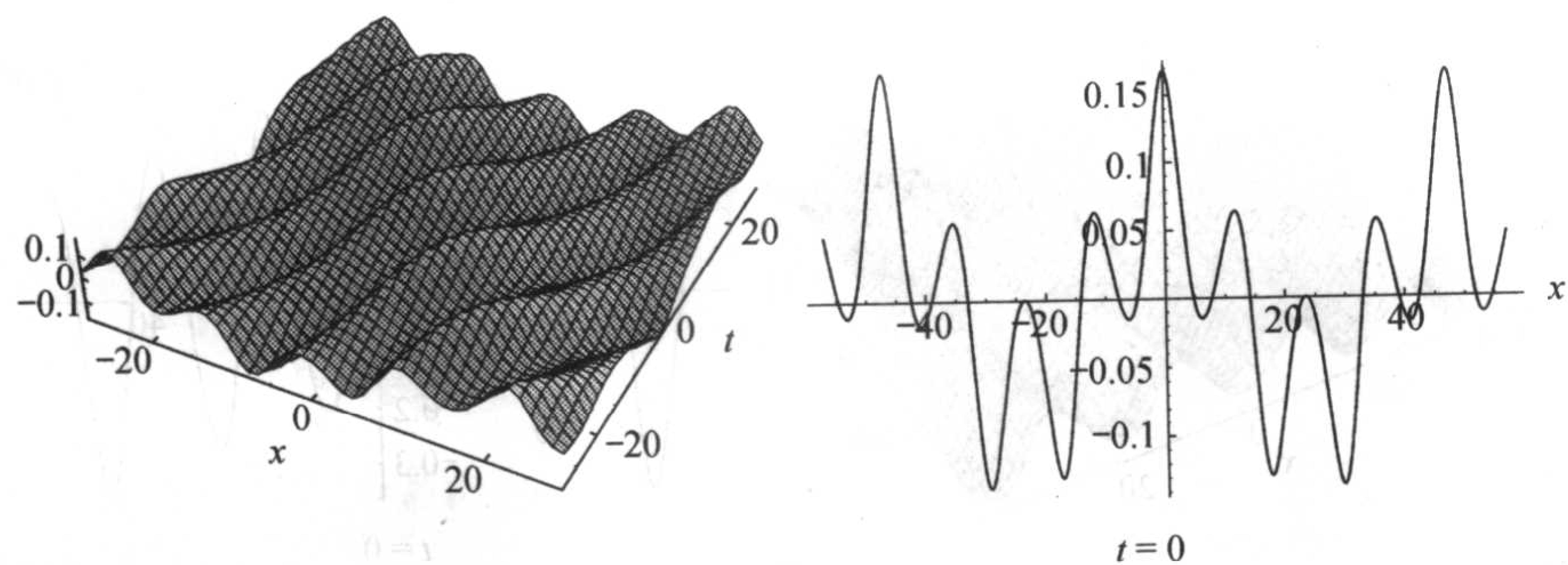
(b)



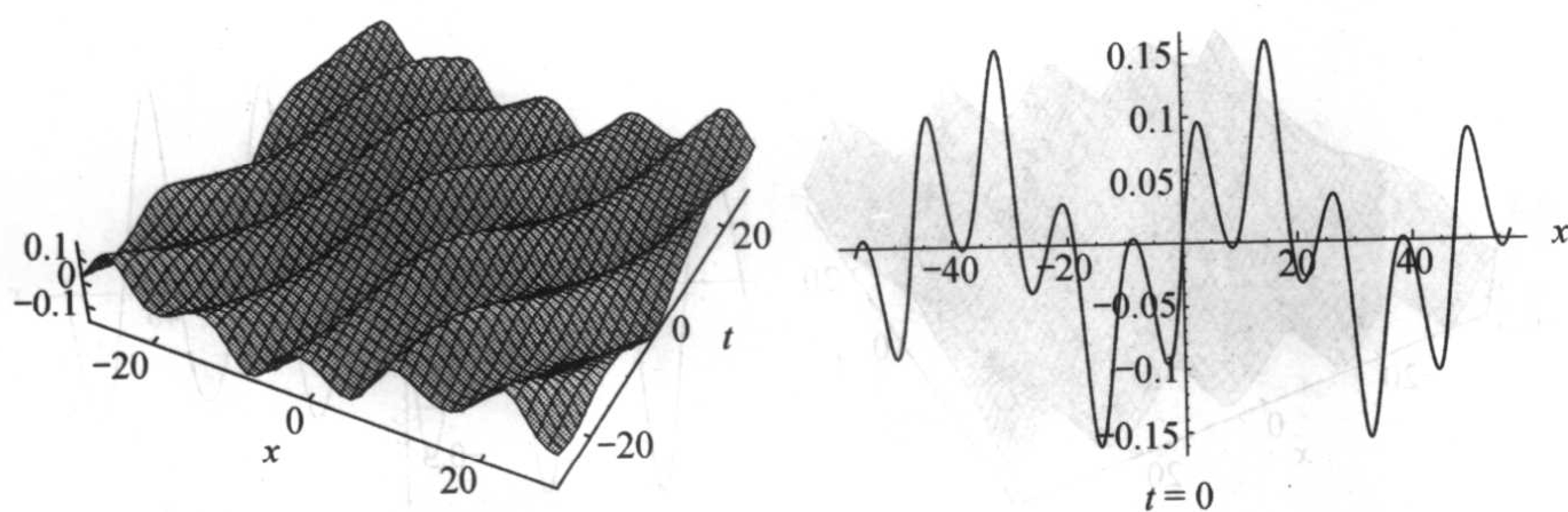
(c)

图 1.4.2　孤子解 u_2 及其在 $t = 0$ 的状态，其中参数 $\alpha = 1, c_2 = 0.1$

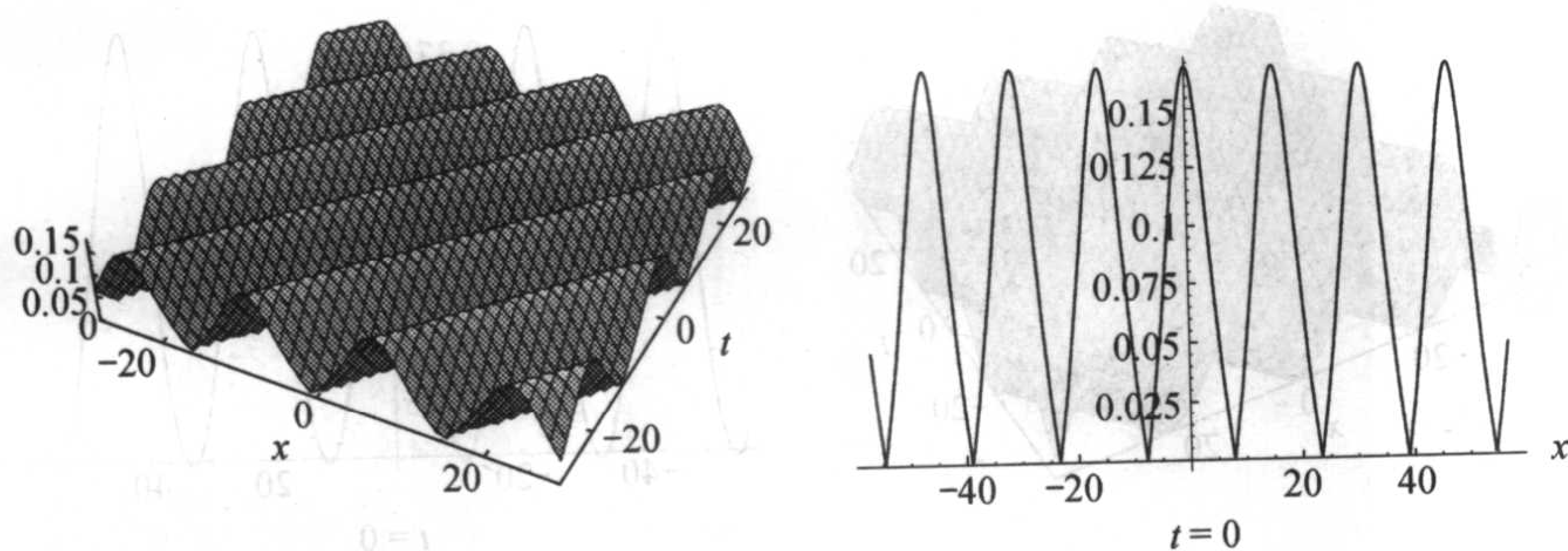
(a) 实部；(b) 虚部；(c) 模



(a)



(b)



(c)

图 1.4.3 Jacobi 双周期解 u_4 及其在 $t=0$ 的状态，其中参数 $\alpha=1, c_2=0.1$

(a) 实部； (b) 虚部； (c) 模

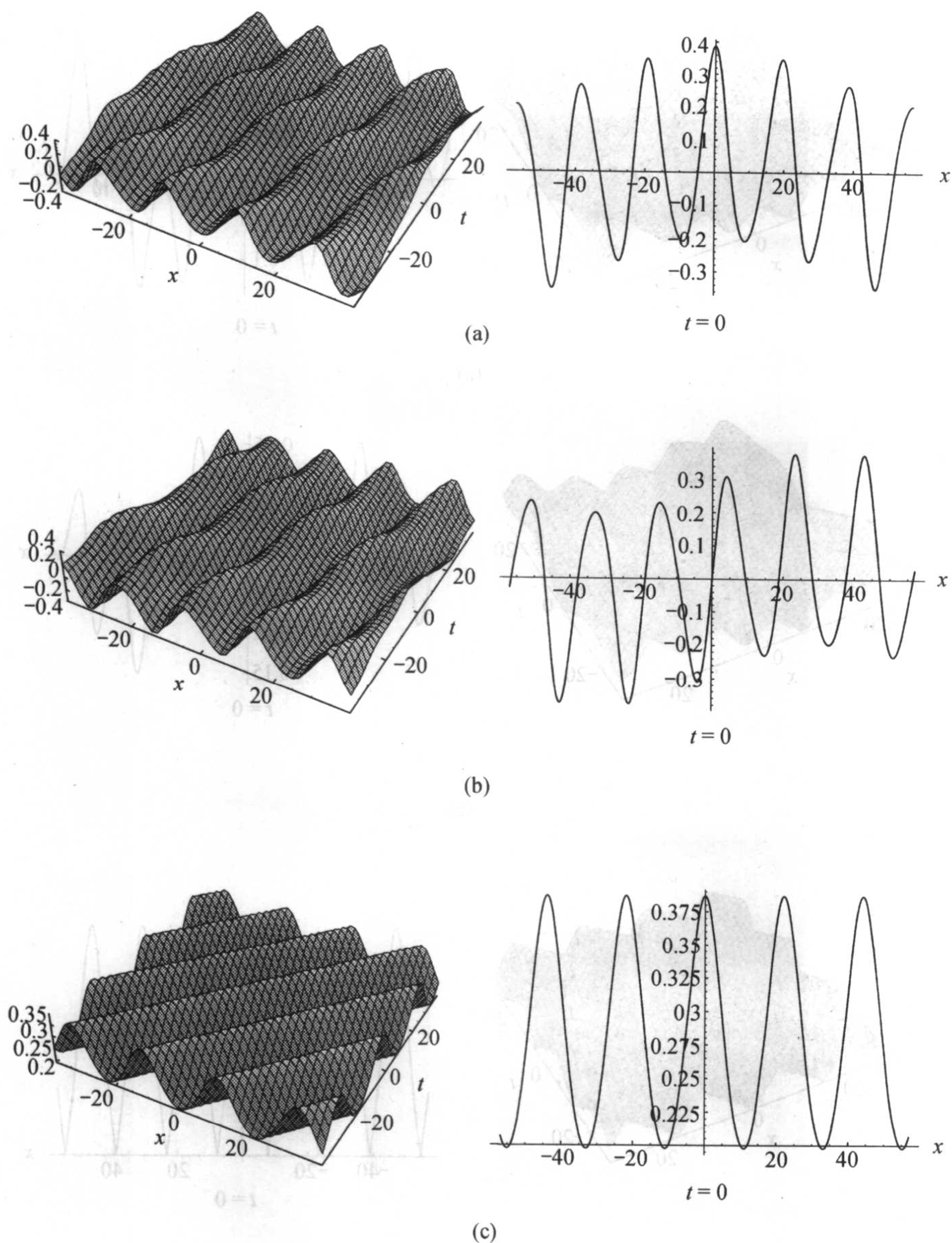


图 1.4.4　Jacobi 双周期解 u_5 及其在 $t=0$ 的状态，其中参数 $\alpha=1, c_2=0.1$

(a) 实部；(b) 虚部；(c) 模

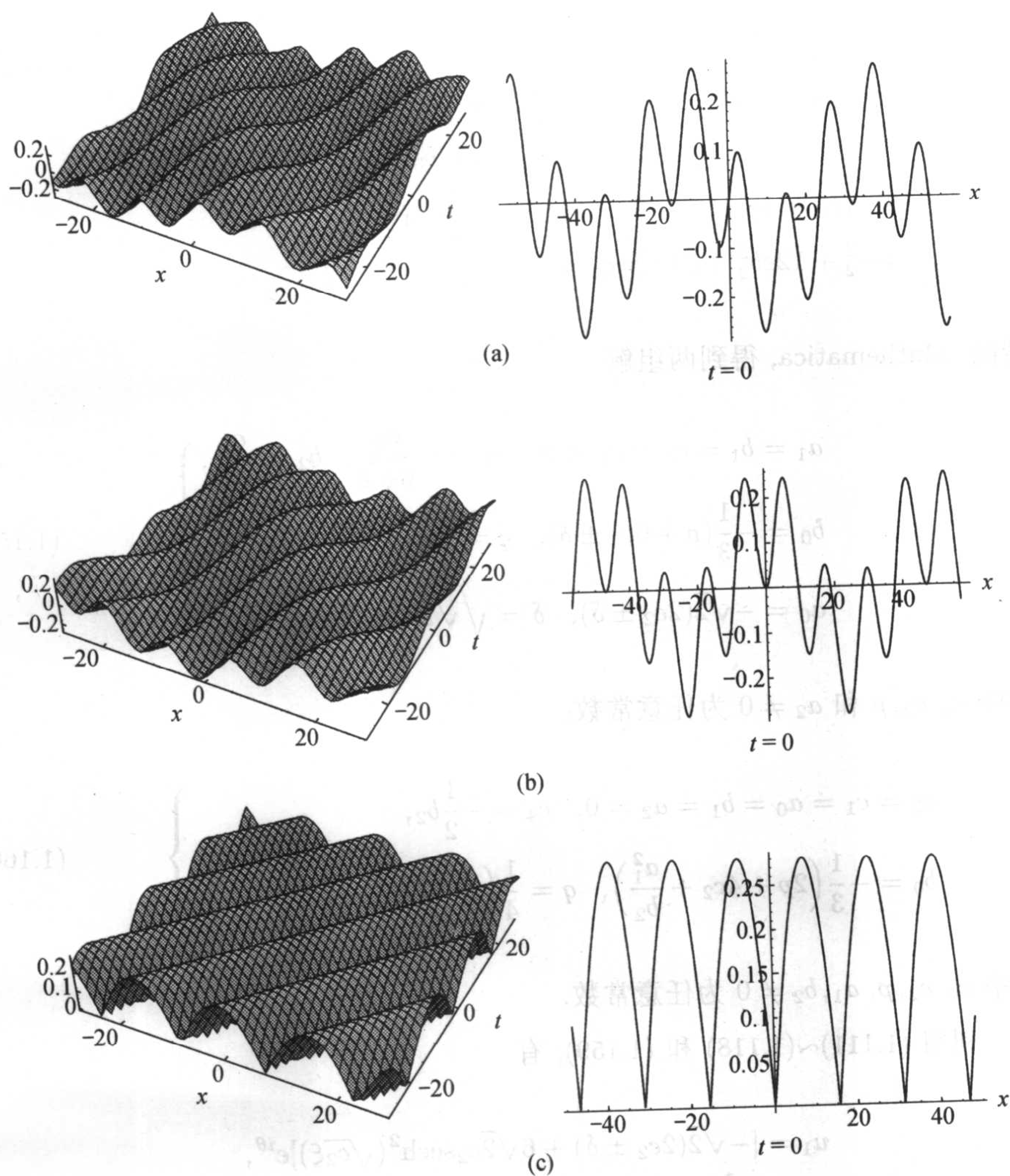


图 1.4.5 Jacobi 双周期解 u_6 及其在 $t=0$ 的状态，其中参数 $\alpha=1, c_2=0.1$.
(a) 实部； (b) 虚部； (c) 模

将 (1.158) 代入 (1.157), 得到

$$
\begin{aligned}
&-2p^2a_0+2qa_0+2a_0b_0+4\varepsilon^2a_2c_0+\varepsilon^2a_1c_1=0,\\
&-2p^2a_1+2qa_1+2a_1b_0+2a_0b_1+6\varepsilon^2a_2c_1+2\varepsilon^2a_1c_2=0,\\
&-2p^2a_2+2qa_2+2a_2b_0+2a_1b_1+2a_0b_2+8\varepsilon^2a_2c_2+3\varepsilon^2a_1c_3=0,
\end{aligned}
$$

$$2a_2b_1 + 2a_1b_2 + 10\varepsilon^2a_2c_3 + 4\varepsilon^2a_1c_4 = 0,$$
$$2a_2b_2 + 12\varepsilon^2a_2c_4 = 0,$$
$$-2\varepsilon a_0a_1 + 2\varepsilon pb_1 + 6\varepsilon b_0b_1 + 3\varepsilon^3b_2c_1 + \varepsilon^3b_1c_2 = 0,$$
$$-2\varepsilon a_1^2 - 4\varepsilon a_0a_2 + 6\varepsilon b_1^2 + 4\varepsilon pb_2 + 12\varepsilon b_0b_2 + 8\varepsilon^3b_2c_2 + 3\varepsilon^3b_1c_3 = 0,$$
$$-6\varepsilon a_1a_2 + 18\varepsilon b_1b_2 + 15\varepsilon^3b_2c_3 + 6\varepsilon^3b_1c_4 = 0,$$
$$-4\varepsilon a_2^2 + 12\varepsilon b_2^2 + 24\varepsilon^3b_2c_4 = 0.$$

借助 Mathematica, 得到两组解

$$\left.\begin{aligned}&a_1 = b_1 = c_3 = c_1 = 0,\quad c_4 = -\frac{a_2}{6\sqrt{2}},\quad b_2 = \frac{a_2}{\sqrt{2}},\\&b_0 = -\frac{1}{3}(p + 6c_2 \pm \delta),\quad q = \frac{1}{3}(p + 3p^2 \pm \delta),\\&a_0 = -\sqrt{2}(2c_2 \pm \delta),\quad \delta = \sqrt{\sqrt{2}a_2c_0 + 4c_2^2},\end{aligned}\right\} \tag{1.159}$$

其中 c_0, c_2, p 和 $a_2 \neq 0$ 为任意常数;

$$\left.\begin{aligned}&c_3 = c_1 = a_0 = b_1 = a_2 = 0,\quad c_4 = -\frac{1}{2}b_2,\\&b_0 = -\frac{1}{3}\left(2p + 4c_2 + \frac{a_1^2}{b_2}\right),\quad q = \frac{1}{4}\left(2p + 2p^2 - 2c_2 - \frac{a_1^2}{b_2}\right),\end{aligned}\right\} \tag{1.160}$$

其中 $c_0, c_2, p, a_1, b_2 \neq 0$ 为任意常数.

利用 (1.111)~(1.118) 和 (1.159), 有

$$\begin{aligned}&u_1 = [-\sqrt{2}(2c_2 \pm \delta) + 6\sqrt{2}c_2\operatorname{sech}^2(\sqrt{c_2}\xi)]e^{i\theta},\\&v_1 = -\frac{1}{3}(p + 6c_2 \pm \delta) + 6c_2\operatorname{sech}^2(\sqrt{c_2}\xi),\quad c_2 > 0;\\&u_2 = [-\sqrt{2}(2c_2 \pm \delta) + 6\sqrt{2}c_2\sec^2(\sqrt{-c_2}\xi)]e^{i\theta},\\&v_2 = -\frac{1}{3}(p + 6c_2 \pm \delta) + 6c_2\sec^2(\sqrt{-c_2}\xi),\quad c_2 < 0,\end{aligned}$$

其中 $\xi = x + 2pt,\quad \theta = px + \frac{1}{3}(p + 3p^2 \pm \delta)t$;

$$u_3 = \left(\pm\sqrt{2}\delta - \frac{6\sqrt{2}}{\xi^2}\right)e^{i\theta},\quad v_3 = -\frac{1}{3}(p \pm \delta) - \frac{6}{\xi^2},\quad c_2 = 0,$$

其中 $\xi=x+2pt,\quad \theta=px+\dfrac{1}{3}(p+3p^2\pm\sqrt{\sqrt{2}a_2c_0})t$;

$$u_4=\left[-\sqrt{2}(2c_2\pm\delta)+\frac{6\sqrt{2}m^2c_2}{2m^2-1}\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\frac{c_2}{2m^2-1}}\xi\right)\right]e^{i\theta},$$

$$v_4=-\frac{1}{3}(p+6c_2\pm\delta)+\frac{6m^2c_2}{2m^2-1}\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\frac{c_2}{2m^2-1}}\xi\right),\quad c_2>0;$$

$$u_5=\left[-\sqrt{2}(2c_2\pm\delta)+\frac{6\sqrt{2}m^2c_2}{m^2+1}\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{-\frac{c_2}{m^2+1}}\xi\right)\right]e^{i\theta},$$

$$v_5=-\frac{1}{3}(p+6c_2\pm\delta)+\frac{6m^2c_2}{m^2+1}\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{-\frac{c_2}{m^2+1}}\xi\right),\quad c_2<0,$$

其中 $\xi=x+2pt,\quad \theta=px+\dfrac{1}{3}(p+3p^2\pm\delta)t$. 当 $m\to1$ 时，周期解 (u_4,v_4) 和 (u_5,v_5) 都退化为孤子解 (u_1,u_1).

利用 (1.111)~(1.118) 和 (1.160), 得到

$$u_7=a_1\sqrt{\frac{2c_2}{b_2}}e^{i\theta}\mathrm{sech}(\sqrt{c_2}\xi),$$

$$v_7=-\frac{1}{6}\left(2p+4c_2-\frac{a_1^2}{b_2}\right)+2c_2\mathrm{sech}^2(\sqrt{c_2}\xi),\quad c_2>0;$$

$$u_8=a_1\sqrt{\frac{2c_2}{b_2}}e^{i\theta}\sec(\sqrt{-c_2}\xi),$$

$$v_8=-\frac{1}{6}\left(2p+4c_2-\frac{a_1^2}{b_2}\right)+2c_2\sec^2(\sqrt{-c_2}\xi),\quad c_2<0,$$

其中 $\xi=x+2pt,\quad \theta=px+\dfrac{1}{6}\left(2p+2p^2-2c_2-\dfrac{a_1^2}{b_2}\right)t$;

$$u_9=-\frac{\sqrt{2}a_1e^{i\theta}}{\sqrt{-b_2}\xi},\quad v_9=-\frac{1}{6}\left(2p+\frac{a_1^2}{b_2}\right)-\frac{2}{\xi^2},\quad c_2=0,$$

其中 $\xi=x+2pt,\quad \theta=px+\dfrac{1}{6}(2p+2p^2-\dfrac{a_1^2}{b_2})t$;

$$u_{10}=a_1e^{i\theta}\frac{2m^2c_2}{b_2(2m^2-1)}\mathrm{cn}\left(\sqrt{\frac{c_2}{2m^2-1}}\xi\right),$$

$$v_{10}=-\frac{1}{6}\left(2p+4c_2+\frac{a_1^2}{b_2}\right)+\frac{2m^2c_2}{2m^2-1}\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\frac{c_2}{2m^2-1}}\xi\right),\quad c_2>0;$$

$$u_{11}=a_1e^{i\theta}\frac{2m^2c_2}{b_2(m^2+1)}\mathrm{sn}\left(\sqrt{-\frac{c_2}{m^2+1}}\xi\right),$$

$$v_{11}=-\frac{1}{6}\left(2p+4c_2+\frac{a_1^2}{b_2}\right)+\frac{2m^2c_2}{m^2+1}\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{-\frac{c_2}{m^2+1}}\xi\right),\quad c_2<0;$$

$$u_{12} = a_1 e^{i\theta} \frac{c_2}{b_2} \tanh\left(\sqrt{-\frac{c_2}{2}}\xi\right),$$

$$v_{12} = -\frac{1}{6}\left(2p + 4c_2 + \frac{a_1^2}{b_2}\right) + c_2 \tanh^2\left(\sqrt{-\frac{c_2}{2}}\xi\right), \quad c_2 < 0,$$

其中 $\xi = x + 2pt$, $\theta = px + \frac{1}{6}(2p + 2p^2 - 2c_2 - \frac{a_1^2}{b_2})t$.

当 $m \to 1$ 时, 周期解 (u_{10}, v_{10}) 退化为孤子解 (u_7, v_7), 而 (u_{11}, v_{11}) 退化为 (u_{12}, v_{12}).

例 1.4.12　考虑 2 + 1 维 Davey-Stewartson 方程

$$\left.\begin{aligned} &iu_t + u_{xx} - u_{yy} - 2|u|^2 u - 2uv = 0 \\ &v_{xx} + v_{yy} + 2(|u|^2)_{xx} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.161}$$

令

$$u = e^{i\theta}U(\xi), v = V(\xi), \theta = px + qy + kt, \quad \xi = x + cy + dt, \tag{1.162}$$

其中 p, q, k, c 和 d 为实常数.

将 (1.162) 代入 (1.161), 可知 $d = -2(p - qc)$, 而 U, V 满足方程组

$$\left.\begin{aligned} &(q^2 - p^2 - k)U + (1 - c^2)U'' - 2U^3 - 2UV = 0 \\ &(1 + c^2)V'' + (U^2)'' = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.163}$$

通过平衡最高导数项和非线性项, 可假设

$$U = a_0 + a_1\varphi, \quad V = b_0 + b_1\varphi + b_2\varphi^2. \tag{1.164}$$

将 (1.164) 代入 (1.163) 得到

$$2(q^2 - p^2 - k)a_0 - 4a_0^3 - 4a_0 b_0 + \varepsilon^2 a_1 c_1 - \varepsilon^2 c^2 a_1 c_1 = 0,$$

$$2(q^2 - p^2 - k)a_1 - 12a_0^2 a_1 - 4a_1 b_0 - 4a_0 b_1 + 2\varepsilon^2 a_1 c_2 - 2\varepsilon^2 c^2 a_1 c_2 = 0,$$

$$-12a_0 a_1^2 - 4a_1 b_1 - 4a_0 b_2 + 3\varepsilon^2 a_1 c_3 - 3\varepsilon^2 c^2 a_1 c_3 = 0,$$

$$-4a_1^3 - 4a_1 b_2 + 4\varepsilon^2 a_1 c_4 - 4\varepsilon^2 c^2 a_1 c_4 = 0,$$

$$8\varepsilon^2 a_1^2 c_0 + 4\varepsilon^2 b_2 c_0 + 4\varepsilon^2 c^2 b_2 c_0 + 4\varepsilon^2 a_0 a_1 c_1 + \varepsilon^2 b_1 c_1 + \varepsilon^2 c^2 b_1 c_1 = 0,$$

$$12\varepsilon^2 a_1^2 c_1 + 6\varepsilon^2 b_2 c_1 + 6\varepsilon^2 c^2 b_2 c_1 + 8\varepsilon^2 a_0 a_1 c_2 + 2\varepsilon^2 b_1 c_2 + 2\varepsilon^2 c^2 b_1 c_2 = 0,$$

$$16\varepsilon^2 a_1^2 c_2 + 8\varepsilon^2 b_2 c_2 + 8\varepsilon^2 c^2 b_2 c_2 + 12\varepsilon^2 a_0 a_1 c_3 + 3\varepsilon^2 b_1 c_3 + 3\varepsilon^2 c^2 b_1 c_3 = 0,$$

$$20\varepsilon^2 a_1^2 c_3 + 10\varepsilon^2 b_2 c_3 + 10\varepsilon^2 c^2 b_2 c_3 + 16\varepsilon^2 a_0 a_1 c_4 + 4\varepsilon^2 b_1 c_4 + 4\varepsilon^2 c^2 b_1 c_4 = 0,$$

$$24\varepsilon^2 a_1^2 c_4 + 12\varepsilon^2 b_2 c_4 + 12\varepsilon^2 c^2 b_2 c_4 = 0,$$

借助 Mathematica, 得到

$$\left.\begin{aligned}&b_0=\frac{1}{2}\left(q^2-p^2-k-6a_0^2+\frac{8a_0^2}{1+c^2}+c_2-c^2c_2\right),\quad b_1=-\frac{4a_0a_1}{1+c^2},\\&b_2=-\frac{2a_1^2}{1+c^2},\quad c_1=\frac{2a_0(4a_0^2+c_2+c^2c_2)}{a_1(1+c^2)},\quad c_3=-\frac{4a_0a_1}{1+c^2},\\&c_4=-\frac{a_1^2}{1+c^2},\end{aligned}\right\}\tag{1.165}$$

其中 a_0,c,p,q,k 和 $a_1\neq 0$ 为任意常数.

令 $a_0=0$, 则 (1.165) 约化为

$$\left.\begin{aligned}&c_3=a_0=b_1=c_1=0,b_0=\frac{1}{2}(q^2-p^2-k+c_2-c^2c_2),\\&b_2=-\frac{2a_1^2}{1+c^2},\quad c_4=-\frac{a_1^2}{1+c^2},\end{aligned}\right\}\tag{1.166}$$

利用 (1.111)~(1.118) 和 (1.166), 得到

$$\begin{aligned}
u_1&=e^{i\theta}\sqrt{c_2(1+c^2)}\mathrm{sech}(\sqrt{c_2}\xi),\\
v_1&=\frac{1}{2}(q^2-p^2-k+c_2-c^2c_2)-\frac{1}{2}c_2\mathrm{sech}^2(\sqrt{c_2}\xi),c_2>0;\\
u_2&=e^{i\theta}\sqrt{c_2(1+c^2)}\sec(\sqrt{-c_2}\xi),\\
v_2&=\frac{1}{2}(q^2-p^2-k+c_2-c^2c_2)-\frac{1}{2}c_2\sec^2(\sqrt{-c_2}\xi),c_2<0;\\
u_3&=-\frac{ie^{i\theta}\sqrt{1+c^2}}{\xi},\quad v_3=\frac{1}{2}(q^2-p^2-k)-\frac{2}{\xi^2};\\
u_4&=e^{i\theta}\sqrt{\frac{2m^2(1+c^2)}{2m^2-1}}\mathrm{cn}\left(\sqrt{\frac{c_2}{2m^2-1}}\xi\right),\\
v_4&=\frac{1}{2}(q^2-p^2-k+c_2-c^2c_2)+\frac{m^2c_2}{2(2m^2-1)}\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\frac{c_2}{2m^2-1}}\xi\right),\quad c_2>0;\\
u_5&=e^{i\theta}\sqrt{\frac{2m^2(1+c^2)}{m^2+1}}\mathrm{sn}\left(\sqrt{-\frac{c_2}{m^2+1}}\xi\right),\\
v_5&=\frac{1}{2}(q^2-p^2-k+c_2-c^2c_2)+\frac{m^2c_2(1+c^2)}{m^2+1}\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{-\frac{c_2}{m^2+1}}\xi\right),\quad c_2>0;\\
u_6&=e^{i\theta}\sqrt{\frac{c_2(1+c^2)}{2}}\tanh\left(\sqrt{\frac{c_2}{2}}\xi\right),\\
v_6&=\frac{1}{2}(q^2-p^2-k+c_2-c^2c_2)+\frac{c_2(1+c^2)}{2}\tanh^2\left(\sqrt{\frac{c_2}{2}}\xi\right),\quad c_2>0,
\end{aligned}$$

其中 $\theta=px+qy+kt,\xi=x+cy-2(p-qc)t$.

当 $m \to 1$ 时，周期解 (u_4, v_4) 退化为孤子解 (u_1, v_1)，而 (u_5, v_5) 退化为 (u_6, v_6).

例 1.4.13 考虑 Mizhnik-Novikov-Veselov 方程 [356]

$$u_t + u_{xxx} + u_{yyy} + 3(u\partial_y^{-1}u_x)_x + 3(u\partial_x^{-1}u_y)_y = 0, \tag{1.167}$$

作变换 $u = U(\xi), \xi = x + cy + dt$, 则方程 (1.167) 约化为

$$cdU' + cU''' + c^4U''' + 3(U^2)' + 3c^3(U^2)' = 0. \tag{1.168}$$

平衡 U''' 和 $(U^2)'$, 可假设

$$V = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2. \tag{1.169}$$

将 (1.169) 代入 (1.168), 并借助 Mathematica, 得到

$$\begin{aligned}
&\varepsilon cda_1 + 6\varepsilon a_0a_1 + 6\varepsilon c^2a_0a_1 + 3\varepsilon^3ca_2c_1 + 3\varepsilon^3c^4a_2c_1 + \varepsilon^3ca_1c_2 + \varepsilon^3c^4a_1c_2 = 0,\\
&6\varepsilon a_1^2 + 6\varepsilon c^2a_1^2 + 2\varepsilon cda_2 + 12\varepsilon a_0a_2 + 12\varepsilon c^2a_0a_2 + 8\varepsilon^3ca_2c_2 + 8\varepsilon^3c^4a_2c_2\\
&\quad +3\varepsilon^3ca_1c_3 + 3\varepsilon^3c^4a_1c_3 = 0,\\
&18\varepsilon a_1a_2 + 18\varepsilon c^2a_1a_2 + 15\varepsilon^3ca_2c_3 + 15\varepsilon^3c^4a_2c_3 + 6\varepsilon^3a_1c^4 + 6\varepsilon^3c^4a_1c_4 = 0,\\
&12\varepsilon a_2^2 + 12\varepsilon c^2a_2^2 + 24\varepsilon^3a_2c_4 + 24\varepsilon^3c^4a_2c_4 = 0.
\end{aligned}$$

该方程组有解

$$a_2 = c_1 = c_4 = 0,\quad c_3 = -\frac{2a_1(1+c^2)}{c(1+c)(c^2-c+1)},\quad d = -\frac{6a_0}{c} - 6ca_0 - c_2 - c^3c_2,$$

其中 c, a_1 和 a_2 为任意常数.

由于 $c_4 = 0$, 利用 (2.14)~ (2.17), 得到 Mizhnik-Novikov-Veselov 方程的如下行波解

$$u_1 = a_0 - \frac{2cc_2(1+c)(c^2-c+1)}{2(c^2+1)}\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c_2}}{2}\xi\right),\quad c_2 > 0;$$

$$u_2 = a_0 - \frac{2cc_2(1+c)(c^2-c+1)}{2(c^2+1)}\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{-c_2}}{2}\xi\right),\quad c_2 < 0;$$

$$u_3 = -a_0 - \frac{2cc_2(1+c)(c^2-c+1)}{2(c^2+1)\xi^2},\quad c_2 = 0;$$

$$u_4 = a_0 + \wp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a_1(1+c^2)}{c(1+c)(c^2-c+1)}}\xi, g_2, g_3\right),$$

其中 $g_2 = -4c_1/c_3, g_3 - 4c_0/c_3, \xi = x - \left(\frac{6a_0}{c} + 6ca_0 + c_2 + c^3c_2\right)t$.

注释 1.4.14 本节我们给出的方法还可应用于其他多种可积和不可积方程，包括经典的 MKdV 方程， Jaulent-Miodek 方程， BBM 方程， Benjamin Ono 方程， Kawachra 方程，形变 Boussinesq 方程， Sinh-Gordon 方程，耦合 KdV 方程， Schrödinger-Boussinsq 方程， coupled Bogoyavlenskii 方程和耦合 Ito 方程等. 定理 1.4.1 不仅是构造多种行波解的统一公式，而且提供了利用 $c_i(i=0,1,2,3,4)$ 的符号判断这些行波解的类型. 此外这种方法也是代数化和机械化的方法，使得冗长而复杂的代数运算可借助于 Mathematica 或 Maple 在计算机上完成. 根据这种方法，方程 (1.107) 的行波解依赖于方程 (1.108) 的可解性，其系数满足关于 c, a_i, c_j 的一代数方程组. 这里我们仅讨论了一种有趣的情况 $r=4$, 当 $r>4$ 时，求解更为复杂，我们将进一步研究.

第2章　齐次平衡法的两个新应用

这一章, 利用推广齐次平衡法寻求非线性方程的 Bäcklund 变换和相似解, 相应的结果分别与 WTC 方法及 CK 方法一致. 而用推广的齐次平衡法避免了 WTC 方法中共振点和递推关系的讨论, 且可获得更一般形式的 Bäcklund 变换; 与 Clarkson-Kruskal 方法相比, 用推广的齐次平衡法可减少一个自由度, 使运算更简单. 从理论上证明齐次平衡法、 WTC 方法、 CK 方法之间的联系.

§2.1　利用齐次平衡法寻找非线性方程的 Bäcklund 变换

齐次平衡法也称拟解法, 是构造非线性方程孤波解的一种有效方法 [120,121], 对于给定一方程

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, \cdots) = 0, \tag{2.1}$$

这种方法的关键思想是寻找方程 (2.1) 如下形式的解

$$u = \partial_x^m \partial_t^n f(w), \tag{2.2}$$

其中 m, n 为整数, 可通过平衡 (2.1) 中的非线性项和线性项得到, 而 $f(w)$ 和 $w(x,t)$ 可通过求解常微分方程得到. 在文献 [101,119] 中, 为获得其他类型的精确解我们提出了改进的齐次平衡法, 这一节, 我们给出齐次平衡法一个新的应用, 即寻找自 Bäcklund 变换.

Bäcklund 变换是构造偏微分方程精确解的有效方法, 在孤立子理论中占有重要地位, 而 Bäcklund 变换的叠加原理将方程求解转化为纯代数运算. 1983 年, Weiss 、 Tabor 和 Carnevale 推广了常微分方程的 Painlevé 性质提出了直接检验偏微分方程 Painlevé 性质的 WTC 方法, 而在 Painlevé 展开零次项截尾可得到非线性方程的 Bäcklund 变换 [68~70]. 在此, 我们应用齐次平衡法得到了非线性方程的 Bäcklund 变换, 相应的结果与使用 WTC 方法一致.

基于齐次平衡法的思想, 为得到 Bäcklund 变换, 我们在 (2.2) 中增加一个待定项, 即寻找方程 (2.1) 如下形式的解

$$u = \partial_x^m \partial_t^n f(w) + \tilde{u}, \tag{2.3}$$

其中 $f = f(w)$,$w = w(x,t)$ 为待定函数, u 和 $\tilde{u}$ 为方程 (2.1) 的两个解, m, n 可通过平衡 u 的最高阶导数项和非线性项得到. 将 (2.3) 代入 (2.1) 并将有关 w_x 的最高阶项放在一起, 再令其系数为零可得 $f(w)$ 的一常微分方程, 由此得到

$f(w)$. 再将 $f(w)$ 各类非线性项换成 $f(w)$ 高阶导数线性项，令 $f', f'', \cdots$ 的系数分别为零，可得到 $w(x,t)$ 的超定方程组，由此得到 w 应满足的相容性条件. 下面举例说明:

例 2.1.1 考虑 KdV-MKdV 方程 [167]

$$u_t + puu_x - qu^2u_x + u_{xxx} = 0, \tag{2.4}$$

这个方程广泛应用于固体物理、原子物理和量子场理论等.

根据 (2.3), 我们寻找方程 (2.4) 如下形式的 Bäcklund 变换

$$u = f'w_x + \tilde{u}, \tag{2.5}$$

这里及下文符号 $'$ 和 $f^{(\cdot)}$ 均代表函数关于 w 的导数.

将 (2.5) 代入 (2.4) 并使用符号运算 Mathematica, 得到

$$\begin{aligned}&(f^{(4)} - qf'^2f'')w_x^4 + (pf'f''w_x^3 - qf'^3w_x^2w_{xx} - 2qf'f''w_x^3\tilde{u} + 6f'''w_x^2w_{xx})\\&+(f''w_tw_x + pf'^2w_xw_{xx} + pf''w_x^2\tilde{u} - qf'^2w_x^2\tilde{u}_x - 2qf'^2w_xw_{xx}\tilde{u}\\&-qf''w_x^2\tilde{u}^2 + 3f''w_{xx}^2 + 4f''w_xw_{xxx}) + (w_{xt} + pw_x\tilde{u}_x + pw_{xx}\tilde{u}\\&-2qw_x\tilde{u}\tilde{u}_x - qw_{xx}\tilde{u}^2 + w_{xxxx})f' = 0\end{aligned} \tag{2.6}$$

令 w_x^4 的系数为零，我们得到一常微分方程

$$f^{(4)} - qf'^2f'' = 0,$$

该方程具有解

$$f = \gamma\ln w, \quad \gamma = \pm\sqrt{\frac{6}{q}}. \tag{2.7}$$

由此，进一步得到

$$f'f'' = -\frac{1}{2}\gamma f''', \quad f'^3 = \frac{1}{2}\gamma^2 f''', \quad f'^2 = -\gamma f''. \tag{2.8}$$

利用 (2.8), 方程 (2.6) 可表示为 f', f'', f''' 的有限级数形式，再令它们的系数为零，便得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}w_x^2(-p\gamma w_x + 2q\gamma w_x\tilde{u} + 6w_{xx}) = 0,\\&w_x(w_t + pw_x\tilde{u} - qw_x\tilde{u}^2 + w_{xxx}) + \frac{1}{2}[w_x(-p\gamma w_x + 2q\gamma w_x\tilde{u} + 6w_{xx})]_x = 0,\\&\frac{\partial}{\partial x}(w_t + pw_x\tilde{u} - qw_x\tilde{u}^2 + w_{xxx}) = 0.\end{aligned}$$

上述方程成立的相容条件为

$$-p\gamma w_x + 2q\gamma w_x \tilde{u} + 6w_{xx} = 0, \tag{2.9}$$

$$w_t + p w_x \tilde{u} - q w_x \tilde{u}^2 + w_{xxx} = 0.. \tag{2.10}$$

由 (2.5) 和 (2.7), 得到 KdV-MKdV 方程的 Bäcklund 变换

$$u = \gamma \frac{\partial}{\partial x} \ln w + \tilde{u}.$$

其中 w 满足方程 (2.9) 和 (2.10).

这种 Bäcklund 变换与 Pailevé 截尾展开结果一致，即

$$u = w^{-\tilde{m}} \sum_{j=0}^{\tilde{m}} u_j w^j,$$

其中 $\tilde{m} = 1$, $u_0 = w_x$, $u_1 = \tilde{u}$.

例 2.1.2　*考虑形变* Boussinesq *方程* [120]

$$u_t + (uv)_x + v_{xxx} = 0, \tag{2.11}$$

$$v_t + u_x + v v_x = 0. \tag{2.12}$$

根据齐次平衡法的思想，寻找如下形式的 Bäcklund 变换

$$u = \partial_x^{m_1} f(w) + \tilde{u}, \quad v = \partial_x^{m_2} g(w) + \tilde{v}.$$

v_{xxx} 与 $(uv)_x$ 平衡，u_x 与 vv_x 平衡，可得 $m_1 = 2, m_2 = 1$, 因此我们假设

$$u = f'' w_x^2 + f' w_{xx} + \tilde{u}, \quad v = g' w_x + \tilde{v}. \tag{2.13}$$

将 (2.13) 代入 (2.11) 和 (2.12), 有

$$\begin{aligned}
&(f''g'' + f'''g' + g^{(4)}) w_x^4 + (4f''g' w_x^2 w_{xx} + f'g'' w_x^2 w_{xx} + 6g''' w_x^2 w_{xx} + f''' w_t w_x^2 \\
&\quad + f''' \tilde{v} w_x^3) + (2f'' w_x w_{xt} + f'' w_t w_{xx} + f'' \tilde{v}_x w_x^2 + 3f'' \tilde{v} w_x w_{xx} \\
&\quad + g'' \tilde{u} w_x^2 + g'' w_{xx}^2 + 4g'' w_x w_{xxx} + f'g' w_x w_{xxx} + f'g' w_{xx}^2) \\
&\quad + (f' w_{xxt} + f' \tilde{v}_x w_{xx} + f' \tilde{v} w_{xx} + g' \tilde{u} w_{xx} + g' \tilde{u}_x w_x + g' w_{xxx} = 0,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
&(f''' + g'g'') w_x^3 + (3f'' w_x w_{xx} + g'^2 w_x w_{xx} + g'' w_t w_x + g'' \tilde{v} w_x^2) \\
&\quad + (g' w_{xt} + g' \tilde{v} w_{xx} + g' \tilde{v}_x w_x + f' w_{xxx}) = 0
\end{aligned} \tag{2.15}$$

令 (2.14) 中 w_x^4 和 (2.15) 中 w_x^3 的系数分别为零，可得一常微分方程组

$$g^{(4)}+f'''g'+f''g''=0,\quad f'''+g'g''=0.$$

其解为

$$f=g=2\ln w. \tag{2.16}$$

由此，进一步得到

$$f'g''=f''g'=-f'''=-g''',\quad g'^2=f'g'=-2f''=-2g'' \tag{2.17}$$

利用 (2.17), 方程 (2.14) 和 (2.15) 表示为 f',f'',f''' 的有限级数，令它们的系数为零得到

$$\begin{gathered}w_x^2(w_t+\tilde{v}w_x+w_{xx})=0,\\ \left(w_{xx}+w_x\tfrac{\partial}{\partial x}\right)(w_t+\tilde{v}w_x+w_{xx})+w_x(w_{xt}+\tilde{v}w_{xx}+\tilde{u}w_x+w_{xxx})=0,\\ w_x(w_t+\tilde{v}w_x+w_{xx})=0,\\ \tfrac{\partial}{\partial x}(w_t+\tilde{v}w_x+w_{xx})=0.\end{gathered}$$

这些方程的相容性条件为

$$w_t+\tilde{v}w_x+w_{xx}=0, \tag{2.18}$$

$$w_{xt}+\tilde{v}w_{xx}+\tilde{u}w_x+w_{xxx}=0. \tag{2.19}$$

由 (2.12) 和 (2.16), 得到形变 Boussinesq 方程的 Bäcklund 变换为

$$u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln w+\tilde{u},\quad v=2\frac{\partial}{\partial x}\ln w+\tilde{v}, \tag{2.20}$$

其中 w 满足 (2.18) 和 (2.19).

如果取形变 Boussinesq 方程 (2.11) 和 (2.12) 的初始接解为 $\tilde{u}=\tilde{v}=0$, 则 (2.18) ~ (2.20) 约化为

$$w_t+w_{xx}=0, \tag{2.21}$$

$$u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln w,\quad v=2\frac{\partial}{\partial x}\ln w. \tag{2.22}$$

这表明 (2.22) 为形变 Boussinesq 方程的线性化变换，特别取方程 (2.21) 的一个解

$$w=1+\exp[c(x-ct)],$$

则变换 (2.22) 给出形变 Boussinesq 方程 (2.11) 和 (2.12) 一组孤波解 [120]

$$u = \frac{c^2}{2}\mathrm{sech}^2[\frac{c}{2}(x-ct)],\quad v = c\left\{1+\tanh\left[\frac{c}{2}(x-ct)\right]\right\}.$$

这里得到的 Bäcklund 变换 (2.18) ~ (2.20) 也与 Painlevé 截尾展开一致，即

$$u = w^{-2}\sum_{j=0}^{2} u_j w^j,\quad v = w^{-1}\sum_{j=0}^{1} v_j w^j,$$

其中

$$u_0 = -2w_x^2,\ u_1 = -w_{xx},\quad u_2 = \tilde{u},\quad v_0 = 2w_x,\quad v_1 = v_0.$$

§2.2　利用齐次平衡法构造非线性方程的相似解

寻找非线性方程相似解的传统方法，是利用经典和非经典 Lie 群方法 [38,39]，然而，这种方法往往涉及大量烦琐代数运算且不能得到发现方程所有的相似解. 最近， Clarkson 和 Kruskal 发展了寻找非线性方程相似解的一种直接而简单方法 [72~77]. 这里我们推广齐次平衡法用于寻找非线性方程的相似解，相应的结果与 CK 方法 [72~74] 一致，但与 CK 法相比较，由于减少了自由度，使得计算更为简单.

这种方法的主要过程与上一节类似，我们仍寻找方程 (2.1) 具有 (2.3) 形式的相似解，不同的是把 $\tilde{u}$ 看作待定函数，将 (2.3) 代入方程 (2.1) 并把 f 相同的导数及幂项放在一起. 为使得相应的方程为 f 的常微分方程，要求它们的系数比仅为 w 的函数，从而可得关于 w 其他待定函数的超定方程组，由此得到 w 和 $\tilde{u}$. 下面我们仍以 KdV-MKdV 方程和形变 Boussinesq 为例来说明这种方法.

例 2.2.1　寻找方程 (2.4) 具有 (2.3) 形式的相似解.

将 (2.3) 代入 (2.4) 并利用 Mathematica, 可得

$$\begin{aligned}&(f^{(4)} - qf'^2f'')w_x^4 + w_x^2w_{xx}(6f''' - qf'^3) + (pw_x^3 - 2qw_x^3\tilde{u})f'f''\\&+(w_tw_x + pw_x^2\tilde{u} - qw_x^2\tilde{u}^2 + 3w_{xx}^2 + 4w_xw_{xxx})f'' + (pw_xw_{xx}\\&-qw_x^2\tilde{u}_x - 2qw_xw_{xx}\tilde{u})f'^2 + (w_{xt} + pw_x\tilde{u}_x + pw_{xx}\tilde{u} - 2qw_x\tilde{u}\tilde{u}_x\\&-qw_{xx}\tilde{u}^2 + w_{xxxx})f' + (\tilde{u}_t + p\tilde{u}\tilde{u}_x - q\tilde{u}^2\tilde{u}_x + \tilde{u}_{xxx}) = 0.\end{aligned}\tag{2.23}$$

欲使得 (2.23) 仅为 $f(w)$ 关于 w 的常微分方程，要求 f 的各阶导数及幂的系数比应为 w 的函数，即下列约束条件应被满足

$$w_x^2w_{xx} = w_x^4\Gamma_1(w),\tag{2.24}$$

$$pw_x^3 - 2qw_x^3\tilde{u} = w_x^4\Gamma_2(w), \tag{2.25}$$

$$w_tw_x + pw_x^2\tilde{u} - qw_x^2\tilde{u}^2 + 3w_{xx}^2 + 4w_xw_{xxx} = w_x^4\Gamma_3(w), \tag{2.26}$$

$$pw_xw_{xx} - qw_x^2\tilde{u}_x - 2qw_xw_{xx}\tilde{u} = w_x^4\Gamma_4(w), \tag{2.27}$$

$$w_{xt} + pw_x\tilde{u}_x + pw_{xx}\tilde{u} - 2qw_x\tilde{u}\tilde{u}_x - qw_{xx}\tilde{u}^2 + w_{xxxx} = w_x^4\Gamma_5(w), \tag{2.28}$$

$$\tilde{u}_t + p\tilde{u}\tilde{u}_x - q\tilde{u}^2\tilde{u}_x + \tilde{u}_{xxx} = w_x^4\Gamma_6(w), \tag{2.29}$$

其中 $\Gamma_i(w)$ $(i = 1, 2, \cdots, 6)$ 为 w 的待定函数. 在确定 $\tilde{u}$ 时, 有两个自由度 u_0, w, 不失一般性, 可利用如下规则:

(a) 如果 $\tilde{u}$ 具有形式 $\tilde{u} = u_0(x,t) + \dfrac{\partial}{\partial x}\Omega$, 则可假设 $\Omega = 0$ (做变换 $f(w) \to f(w) - \Omega$);

(b) 如果 $w(x,t)$ 可由方程 $\Omega(w) = w_0(x,t)$ 决定, 可假设 $\Omega = w$ (做变换 $w \to \Omega^{-1}(w)$).

利用 (a)~ (b), 可得到方程 (2.24) ~ (2.29) 的解为

$$\Gamma_1(w) = \Gamma_2(w) = \Gamma_4(w) = \Gamma_6(w) = 0, \quad \Gamma_3(w) = Aw + B,$$

$$\Gamma_5(w) = A, \quad \tilde{u} = \frac{p}{2q}, \quad w = \theta x + \sigma.$$

而 $\theta = \theta(t), \sigma = \sigma(t)$ 满足

$$\theta' = A\theta^4, \quad \sigma' + \frac{p^2}{4q}\theta = \theta^3(A\sigma + B). \tag{2.30}$$

从而得到 KdV-MKdV 的相似解

$$u = \theta P + \frac{p}{2q}, \quad w = \theta x + \sigma. \tag{2.31}$$

其中 $P = P(w) = f'$ 满足方程

$$P''' - qP^2P' + (Aw + B)P' + AP = 0.$$

进一步讨论三种情况:

(i) 若 $A = B = 0$, 则 (2.30) 的一般解为

$$\theta = \theta_0, \quad \sigma = -\frac{p^2}{4q}\theta_0 t,$$

其中 θ_0 为任意常数 (不失一般性, 取 $\theta_0 = 1$), 于是 KdV-MKdV 方程的相似解为

$$u = P(w) + \frac{p}{2q}, \quad w = x - \frac{p^2}{4q}t.$$

其中 P 满足

$$P''' - qP^2P' = 0.$$

将该方程积分两次，可得到具有 Jacobi 椭圆函数解的 Painlevé I 方程

$$P'^2 = \frac{q}{6}P^3 + 2c_1w + c_2.$$

当 $c_1 = c_2 = 0$ 时，它的一个特解为

$$P = \pm 4q\sqrt{\frac{q}{6}}\frac{1}{4qx - p^2t}.$$

从而，由 (2.31) 给出 KdV-MKdV 方程的行波解

$$u = \frac{p}{2q} \pm 4q\sqrt{\frac{q}{6}}\frac{1}{4qx - p^2t},$$

该解沿直线 $4qx - p^2t = 0$ 含有奇性.

(ii) 若 $A = 0, B \neq 0$, 则 (2.30) 的一般解为

$$\theta = \theta_0,\quad \sigma = \left(-\frac{p^2}{4q}\theta_0 + B\theta_0^3\right)t,$$

其中 θ_0 为任意常数 (不失一般性，取 $\theta_0 = 1$), 则 KdV-MKdV 方程的相似解为

$$u = \frac{p}{2q} + P(w),\quad w = x + \left(-\frac{p^2}{4q} + B\right)t.$$

而 P 满足 Duffing 方程

$$P'' - \frac{1}{3}qP^3 + BP = c. \tag{2.32}$$

取 $c = 0$, $B = -q/6$, 可得方程 (3.32) 一个解

$$P = \sec h\left[\sqrt{-\frac{q}{6}}w\right],$$

于是，得到 KdV-MKdV 方程的钟状孤波解

$$u = \frac{p}{2q} + \sec h\left[\sqrt{\frac{6}{q}}\left(x - \left(\frac{p^2}{4q} + \frac{q}{6}\right)t\right)\right].$$

令 $c = 0$, $B = q/6$, 方程 (2.32) 具有解

$$P = \sec\left[\sqrt{\frac{q}{6}}w\right],$$

由此得到行波解

$$u = \frac{p}{2q} + \sec\left\{\sqrt{\frac{6}{q}}\left[x - \left(\frac{p^2}{4q} - \frac{q}{6}\right)t\right]\right\}.$$

这个解沿平行线 $\sqrt{\frac{6}{q}}x - \left(\frac{p^2}{4q}\sqrt{\frac{6}{q}} - \sqrt{\frac{q}{6}}\right)t = k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, \cdots$ 带有奇性.

(iii) 若 $A \neq 0$, 不失一般性, 令 $A = -1/3, B = 0$ (否则, 可做变换 $\sigma \to \sigma - B/A$). 解方程 (2.21) 得到

$$\theta = t^{-\frac{1}{3}}, \quad \sigma = -\frac{p^2}{4q}t^{\frac{2}{3}}.$$

于是 KdV-MKdV 方程的相似解为

$$u = \frac{p}{2q} + t^{-\frac{1}{3}}P(w), \quad w = t^{-\frac{1}{3}}x - \frac{p^2}{4q}t^{\frac{2}{3}},$$

其中 P 满足 Pailevé II 方程

$$P''' - qP^2P' - \frac{1}{3}wP' - \frac{1}{3}P = 0.$$

我们发现这些解也可由 CK 直接法得到, 即

$$u = \alpha(x,t) + \beta(x,t)Q(w), \tag{2.33}$$

其中

$$\alpha = \tilde{u}, \quad \beta = w_x, \quad Q(w) = f''(w).$$

例 2.2.2 对形变 Boussinesq 方程 (2.11) 和 (2.12), 寻找如下形式的相似解

$$u = f''w_x^2 + f'w_{xx} + \tilde{u}, \quad v = g'w_x + \tilde{v} \tag{2.34}$$

其中 $w = w(x,t)$, $\tilde{u} = \tilde{u}(x,t)$ 和 $\tilde{v} = \tilde{v}(x,t)$ 为待定函数. 将 (2.34) 代入方程 (2.11) ~ (2.12) 得到

$$\begin{aligned} &w_x^4(f''g'' + f'''g' + g^{(4)}) + w_x^2w_{xx}(4f''g' + f'g'' + 6g''') + (w_tw_x^2 + \tilde{v}w_x^3)f''' \\ &+(2w_xw_{xt} + w_tw_{xx} + \tilde{v}_xw_x^2 + 3\tilde{v}w_xw_{xx})f'' + (\tilde{u}w_x^2 + 4w_xw_{xxx} + w_{xx}^2)g'' \\ &+(w_xw_{xxx} + w_{xx}^2)f'g' + (w_{xxt} + \tilde{v}_xw_{xx} + \tilde{v}w_{xx})f' + (\tilde{u}w_{xx} + \tilde{u}_xw_x \\ &+w_{xxx})g' + (\tilde{u}_t + (\tilde{u}\tilde{v})_x + \tilde{v}_{xxx}) = 0, \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} &w_x^3(f''' + g'g'') + w_xw_{xx}(3f'' + g'^2) + (w_tw_x + \tilde{v}w_x^2)g'' + (w_{xt} + \tilde{v}w_{xx} \\ &+\tilde{v}_xw_x)g' + w_{xxx}f' + (\tilde{v}_t + \tilde{u}_x + \tilde{v}\tilde{v}_x) = 0. \end{aligned} \tag{2.36}$$

为使方程 (2.35) 和 (2.36) 为 f,g 关于 w 的常微分方程，要求 f,g 各阶导数及幂的系数之比为 w 的函数，即满足下列条件

$$w_x^2 w_{xx} = w_x^4 \Gamma_1(w), \tag{2.37}$$

$$w_t w_x^2 + \tilde{v} w_x^3 = w_x^4 \Gamma_2(w), \tag{2.38}$$

$$2w_x w_{xt} + w_t w_{xx} + \tilde{v}_x w_x^2 + 3\tilde{v} w_x w_{xx} = w_x^4 \Gamma_3(w), \tag{2.39}$$

$$\tilde{u} w_x^2 + 4 w_x w_{xxx} + w_{xx}^2 = w_x^4 \Gamma_4(w), \tag{2.40}$$

$$w_x w_{xxx} + w_{xx}^2 = w_x^4 \Gamma_5(w), \tag{2.41}$$

$$w_{xxt} + \tilde{v}_x w_{xx} + \tilde{v} w_{xx} = w_x^4 \Gamma_6(w), \tag{2.42}$$

$$\tilde{u} w_{xx} + \tilde{u}_x w_x + w_{xxx} = w_x^4 \Gamma_7(w), \tag{2.43}$$

$$\tilde{u}_t + (\tilde{u}\tilde{v})_x + \tilde{v}_{xxx} = w_x^4 \Gamma_8(w), \tag{2.44}$$

$$w_x w_{xx} = w_x^3 \Gamma_9(w), \tag{2.45}$$

$$w_t w_x + \tilde{v} w_x^2 = w_x^3 \Gamma_{10}(w), \tag{2.46}$$

$$w_{xt} + \tilde{v} w_{xx} + \tilde{v}_x w_x = w_x^3 \Gamma_{11}(w), \tag{2.47}$$

$$w_{xxx} = w_x^4 \Gamma_{12}(w), \tag{2.48}$$

$$\tilde{v}_t + \tilde{u}_x + \tilde{v}\tilde{v}_x = w_x^3 \Gamma_{13}(w), \tag{2.49}$$

其中 Γ_i $(i = 1, 2, \cdots, 13)$ 为关于 w 的待定函数．在确定 $\tilde{u}, \tilde{v}, w$ 过程中，有三个自由度，可利用如下规则：

(a) 如果 $\tilde{u}$ 具有形式 $\tilde{u} = u_0(x,t) + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Omega$, 则可取 $\Omega = 0$ (做变换 $f(w) \to f(w) - \Omega$);

(b) 如果 $\tilde{u}$ 具有形式 $\tilde{u} = v_0(x,t) + \dfrac{\partial}{\partial x}\Omega$, 则可取 $\Omega = 0$ (做变换 $f(w) \to f(w) - \Omega$);

(c) 如果 $w(x,t)$ 由形如 $\Omega(w) = w_0(x,t)$ 的方程决定，可取 $\Omega = w$ (做变换 $w \to \Omega^{-1}(w)$).

利用 (a)～ (c), 方程 (2.37)～ (2.49) 的一般解为

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_4 = \Gamma_5 = \Gamma_6 = \Gamma_7 = \Gamma_8 = \Gamma_9 = \Gamma_{10} = \Gamma_{11} = \Gamma_{12} = 0$$

$$\Gamma_3 = A, \quad \Gamma_{13} = -A^2 w - B$$

$$\tilde{u} = 0, \quad \tilde{v} = -\frac{1}{\theta}(\theta' x + \sigma')$$

$\theta=\theta(t),\sigma=\sigma(t)$ 满足

$$\theta'=A\theta^3,\quad \sigma''-2A\theta^2\sigma'=\theta^4(A^2\sigma+B). \tag{2.50}$$

最后，形变 Boussinesq 方程的相似解为

$$u=\theta^2 P,\qquad v=\theta Q-\frac{1}{\theta}(\theta' x+\sigma'),\qquad w=\theta x+\sigma, \tag{2.51}$$

其中 $P=f'',Q=g'$.
而 P,Q 由下列耦合方程确定

$$Q'''+(PQ)'+AP=0,\quad P'+QQ'-A^2w-B=0. \tag{2.52}$$

我们讨论三种情况:

(i) 若 $A=B=0$, 则 (2.50) 的解为

$$\theta=\theta_0,\quad \sigma=c_1 t,$$

其中 θ_0,c_1 为任意常数 (不失一般性，取 $\theta_0=1$), 因此形变 Boussinesq 方程的相似解为

$$u=P(w),\quad v=Q(w)-c_1,\quad w=x+c_1 t, \tag{2.53}$$

而 P,Q 满足

$$Q'''+(PQ)'=0,\quad P'+QQ'=0. \tag{2.54}$$

从两个方程中消去 P, 可得 Duffing 方程

$$Q''-\frac{1}{2}Q^3+c_2 Q-c_3=0, \tag{2.55}$$

其中 c_2,c_3 为任意常数.

当 $c_2=c_3=0$, 方程 (3.54) 和 (3.55) 具有解

$$Q=\frac{2}{w},\qquad P=-\frac{2}{w^2}.$$

于是方程 (3.53) 给出形变 Boussinesq 方程的行波解

$$u=\frac{2}{(x+c_1 t)^2},\quad v=-c_1+\frac{2}{x+c_1 t}.$$

当 $c_2>0,c_3=0$, 我们令 $c_2=1$, 方程 (2.54) 和 (2.55) 有解

$$Q=2\sec(w),\quad P=-2\tan^2(w)$$

与得到形变 Boussinesq 方程的另一行波解

$$u = -2\tan^2(x + c_1 t), \quad v = 2\sec(x + c_1 t) - c_1.$$

当 $c_2 < 0, c_3 = 0$, 令 $c_2 = -1$, 方程 (2.54) 和 (2.55) 具有解

$$Q = -2\csc h(w), \quad P = 2\csc h^2(w)$$

由此，可得形变 Boussinesq 方程的孤波解

$$u = 2\csc h^2(x + c_1 t), \quad v = -2\csc h(x + c_1 t) - c_1.$$

(ii) 若 $A = 0, B \neq 0$, 方程 (2.50) 的解为

$$\theta = \theta_0, \quad \sigma = Bt^2 + c_1 t,$$

其中 θ_0, c_1 为任意常数 (不失一般性，取 $\theta_0 = 1$), 则形变 Boussinesq 方程的相似解为

$$u = P(w), \quad v = -2Bt - c_1 + Q(w), \quad w = x + Bt^2 + c_1 t.$$

而 P, Q 满足

$$Q''' + (PQ)' = 0, \quad P' + QQ' - B = 0.$$

消去 P 后，得到 Painleve II 方程

$$Q'' = \frac{1}{2}Q^3 - BwQ - c_4 Q.$$

(iii) 若 $A \neq 0$, 不失一般性，我们令 $A = -\frac{1}{2}, B = 0$ $\left(否则，做变换 \sigma \to \sigma - \frac{2B}{A^2}\right)$. 解方程 (2.50) 得到

$$\theta = t^{-\frac{1}{2}}, \quad \sigma = c_1 t^{\frac{1}{2}}.$$

从而形变 Boussinesq 方程的相似解为

$$u = t^{-1}P(w), \quad v = t^{\frac{1}{2}}Q(w) + \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}x - c_1 t, \quad w = t^{-\frac{1}{2}}x + c_1 t^{\frac{1}{2}}.$$

而 P, Q 满足

$$Q''' + (PQ)' - \frac{1}{2}P = 0, \quad P' + QQ' - \frac{1}{4}w = 0.$$

上述相似解与 CK 直接法的结果一致，即

$$u = \alpha + \beta P(w), \quad v = A + BQ(w),$$

其中

$$\alpha = \tilde{u}, \quad \beta = w_x^2, \quad A = \tilde{v}, \quad B = w_x,$$

但由于减少了自由度，所以计算更简单.

§2.3 齐次平衡法，WTC 法和 C-K 法之间的联系

通过前两节的例子，我们看到利用推广的齐次平衡法得到的 Bäcklund 变换，相似解分别与 WTC 法和 C-K 法所得结果一致，这里我们从理论上说明三者之间的密切联系.

假设 $\partial_x^{m_0}\partial_t^{n_0}u$ 为方程 (2.1) 的最高阶导数项，并将方程 (2.1) 改写为

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, \cdots, \partial_x^{m_0}\partial_t^{n_0}u) = 0. \tag{2.56}$$

将 (2.3) 代入方程 (2.56), 并收集 $\phi_x^{m+m_0}\phi_t^{n+n_0}$ 项，令其系数为零可得如下形式的齐次常微分方程

$$f^{(m+m_0+n+n_0)} + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=m+m_0+n+n_0} a_{i_1,i_2,\cdots,i_k} f^{(i_1)} f^{(i_2)} \cdots f^{(i_k)} = 0,$$

该方程具有对数形式的解

$$f = \gamma \ln\phi, \tag{2.57}$$

其中 γ 由下列 k 阶代数方程决定

$$(m+m_0+n+n_0-1)!\gamma + \sum (-1)^{k-1}(i_1-1)!\cdots(i_k-1)! a_{i_1,i_2,\cdots,i_k}\gamma^k = 0.$$

将 (2.57) 代入 (3.3) 可得到关于 ϕ 的有限级数形式

$$u = \gamma\partial_x^{m-1}\partial_t^n\left(\frac{\phi_x}{\phi}\right) + \tilde{u} = \frac{\tilde{u}}{\phi^{m+n}} + \cdots + \frac{u_{m+n-1}}{\phi} + \tilde{u},$$

其中

$$\tilde{u} = (-1)^{m+n-1}(m+n-1)!\gamma\phi_x^m\phi_t^n, \cdots, u_{m+n-1} = \gamma\partial_x^m\partial_t^n\phi.$$

这恰与 Painlevé 截尾展开一致，不同之处是推广的齐次平衡法中 m, n 通过比较 $w_x w_t$ 的最高阶项确定；而 WTC 方法中，$\tilde{m}$ 通过比较 w 的最低项确定. 但应用齐次平衡法避免了 WTC 方法中结点和递推关系的讨论，使计算更加直接、容易.

下面通过分析最高阶导数项，我们再解释齐次平衡法与 C-K 方法的关系，不失一般性，我们假设 $m+m_0 \geq n+n_0$.

(i) 当 $n+n_0=0$, 根据齐次平衡法，将 (2.3) 代入 (2.56) 时，在 $\partial_x^{m_0}u$ 中将出现两项

$$w_x^{m+m_0}f^{(m+m_0)}, \quad w_x^{m+m_0-2}w_{xx}f^{(m+m_0-1)}.$$

因此，按规则 (b) 规范化系数时，我们要求 $w_x^{m+m_0-2}w_{xx}=w_x^{m+m_0}\Gamma(w)$ 由此看出 w 具有形式 $w=\theta(t)x+\sigma(t)$, 即我们有

$$u=\partial_x^m f(w)+\tilde{u}=w_x^m f^{(m)}(w)+\tilde{u}.$$

与 (2.33) 比较，可得

$$\alpha(x,t)=\tilde{u},\quad \beta(x,t)=w_x^m,\quad Q(w)=f^{(m)}(w),$$

这恰好说明了齐次平衡法与 C-K 法的密切联系.

(ii) 当 $m+m_0=n+n_0=1$ 时，在 $\partial_t^{n_0}\partial_x^{m_0}u$ 中将有

$$w_tw_xf'',\quad w_{xt}f'$$

出现，由此可得 $w_{xt}=0,\ w=\theta(x)+\sigma(t)$ 和

$$u=\partial_t^n\partial_x^m f(w)+\tilde{u}=w_t^nw_x^m f^{(m+n)}(w)+\tilde{u}. \tag{2.58}$$

与 (2.33) 比较知

$$\alpha(x,t)=\tilde{u},\quad \beta(x,t)=w_t^nw_x^m,\quad Q(w)=f^{(m+n)}(w). \tag{2.59}$$

这给出了齐次平衡法与 C-K 方法另一形式的关系.

(iii) 当 $m+m_0>n+n_0=1$ 时，在 $\partial_t^{n_0}\partial_x^{m_0}u$ 将出现三项

$$w_tw_x^{m+m_0}f^{(m+m_0+1)},\quad w_{xt}w_x^{m+m_0-2}f^{(m+m_0-1)},\quad w_tw_{xx}w_x^{m+m_0-2}f^{(m+m_0)}$$

由此得到 $w_{xx}=w_{xt}=0, w=c_1x+\theta(t)$, 从而我们仍有 (2.58) 和 (2.59) 的形式.

(iv) 当 $m+m_0\geq n+n_0>1$ 时，在 $\partial_t^{n_0}\partial_x^{m_0}u$ 将会出现四项

$$w_t^{n+n_0}w_x^{m+m_0}f^{(m+m_0+n+n_0+1)},\quad w_{xt}w_t^{n+n_0}w_x^{m+m_0-2}f^{(m+m_0+n+n_0-1)},$$

$$w_{tt}w_x^{m+m_0}w_t^{n+n_0-2}f^{(m+m_0+n+n_0-1)},\quad w_{xx}w_t^{n+n_0}w_x^{m+m_0-2}f^{(m+m_0)}.$$

由此得到 $w_{xx}=w_{xt}=w_{tt}=0$. 这时，只有行波约化 $w=c_1x+c_2t$, 显然 (2.58) 和 (2.59) 也被满足.

§2.4 一般变系数 KdV 方程的 Auto-Bäcklund 变换和相似约化

近年来，变系数非线性方程的研究引起了人们的极大兴趣 [57~63]. 一般变系数 KdV 方程为

$$u_t+f(t)uu_x+g(t)u_{xxx}=0, \tag{2.60}$$

其中 $f(t)$ 和 $g(t)$ 为时间 t 的任意函数，这一方程首先由 Grimshaw 引入 [5]. 对特殊情况 $f(t)=\alpha t^n$, $g(t)=\beta t^m$, Nirmala 和 Vedan[362,363] 利用 WTC 方法和经典 Lie 群方法分别研究了它的 auto-Bäcklund 变换， Painlevé 性质和相似约化. 最近，利用 Painlevé 展开并在条件

$$g(t)=cf(t) \tag{2.61}$$

下， Hong 和 Jung 导出了该方程的一种 auto-Bäcklund 变换和精确解 [364].

这里，我们进一步将齐次平衡法推广到变系数非线性方程情形，推导变系数 KdV 的 Bäcklund 变换和相似约化，相应的结果与 WTC 法和 C-K 法分别一致.

根据推广的齐次平衡法，寻找方程 (2.60) 如下形式的 Bäcklund 变换

$$u=w''\phi_x^2+w'\phi_{xx}+\tilde{u}, \tag{2.62}$$

其中 $' := \dfrac{\partial}{\partial\phi}$, $w=w(\phi),\phi=\phi(x,t)$, $\tilde{u}$ 为待定函数.

将 (2.62) 代入 (2.60) 得到

$$\begin{aligned}
&(fw''w'''+gw^{(5)})\phi_x^5+(3fw''^2+fw'w'''+10gw^{(4)})\phi_x^3\phi_{xx}\\
&+(w'''\phi_t\phi_x^2+fw'w''\phi_x^2\phi_{xxx}+3fw'w''\phi_x\phi_{xx}^2+15gw'''\phi_x\phi_{xx}^2\\
&+10gw'''\phi_x^2\phi_{xxx}+fw'''\phi_x^3\tilde{u}+2w''\phi_x\phi_{xt}+w''\phi_t\phi_{xx}+fw'^2\phi_{xx}\phi_{xxx}\\
&+10gw''\phi_{xx}\phi_{xxx}+5gw''\phi_x\phi_{xxxx}+fw''\phi_x^2\tilde{u}_x+3fw''\phi_x\phi_{xx}\tilde{u})\\
&+(\phi_{xxt}+g\phi_{xxxxx}+f\phi_{xx}\tilde{u}_x+f\tilde{u}\phi_{xxx})w'+(\tilde{u}_t+f\tilde{u}\tilde{u}_x+g\tilde{u}_{xxx})=0.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

为简化方程 (2.63), 令 ϕ_x^5 的系数为零得到

$$fw''w'''+gw^{(5)}=0,$$

在条件 (2.61) 下，该方程有解

$$w=12c\ln\phi, \tag{2.64}$$

由此，进一步得到

$$\begin{aligned}
&w''^2=-2cw^{(4)},\quad w'w'''=-4cw^{(4)},\quad w'w''=-6cw''',\\
&w'^2=-12cw''.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

利用 (2.65), 方程 (2.63) 可整理为关于 w^0, w', w'', w''' 和 $w^{(4)}$ 的多项式，令其系数为零得到

$$
\begin{aligned}
&\phi_x(\phi_x\phi_t + 4g\phi_x\phi_{xxx} - 3g\phi_{xx}^2 + f\phi_x^2\tilde{u}) = 0,\\
&\phi_x(\phi_{xt} + f\phi_{xx}\tilde{u} + g\phi_{xxxx}) + \frac{\partial}{\partial x}(\phi_x\phi_t + 4g\phi_x\phi_{xxx} - 3g\phi_{xx}^2 + f\phi_x^2\tilde{u}) = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial x}(\phi_{xt} + f\phi_{xx}\tilde{u} + g\phi_{xxxx}) = 0,\\
&\tilde{u}_t + f\tilde{u}\tilde{u}_x + g\tilde{u}_{xxx} = 0.
\end{aligned}
$$

欲使上述方程成立，只需

$$\phi_x\phi_t + 4g\phi_x\phi_{xxx} - 3g\phi_{xx}^2 + f\phi_x^2\tilde{u} = 0, \tag{2.66}$$

$$\phi_{xt} + f\phi_{xx}\tilde{u} + g\phi_{xxxx} = 0, \tag{2.67}$$

$$\tilde{u}_t + f\tilde{u}\tilde{u}_x + g\tilde{u}_{xxx} = 0.$$

由 (2.62) 和 (2.64), 得到变系数 KdV 方程的 Bäcklund 变换

$$u = 12c\partial_x^2 \ln\phi + \tilde{u}, \tag{2.68}$$

其中 ϕ 满足 (2.66) 和 (2.67), $\tilde{u}$ 为方程 (2.60) 的一个解.

注释 2.4.1　这里得到的 Bäcklund 变换与 WTC 方程的结果一致，即

$$u(x,t) = \phi^{-m}\sum_{j=0}^{m} u_j\phi^j,$$

其中

$$m = 2,\quad \tilde{u} = -12c\phi_x^2,\quad u_1 = 12c\phi_{xx},\quad u_2 = \tilde{u}.$$

由方程 (2.66) 解出 ϕ_t, 然后对 x 微分并利用方程 (2.67) 消去 ϕ_{xt}, 再做变换 $\phi_x = \psi^2$, 则有

$$6g\psi_{xx} + f\psi\tilde{u} = \lambda\psi. \tag{2.69}$$

利用 (2.67) 得到

$$\psi_t = -\frac{1}{3}(f\tilde{u} + 2\lambda)\psi_x + \frac{1}{6}f\tilde{u}_x\psi. \tag{2.70}$$

方程 (2.69) 和 (2.70) 构成方程 (2.60) 的 Lax 对.

对方程 (2.67) 关于 x 微分并令 $\sigma = \phi_{xx}$, 得到

$$\sigma_t + (f\tilde{u}\partial_x + f\tilde{u}_x + g\partial_x^3)\sigma = 0,$$

这说明 σ 为方程 (2.60) 的一个对称.

这里可给出方程 (2.60) 的前两个守恒律

$$u_t+\left(\frac{1}{2}fu^2+gu_{xx}\right)_x=0,$$
$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t+\left(\frac{1}{3}fu^3-\frac{1}{2}gu_x^2+guu_{xx}\right)_x=0.$$

高阶守恒律不易直接得到，需要进一步研究.

显然方程 (2.66) 和 (2.67) 具有一组解 $\tilde{u}=0$,

$$\phi=1+\exp\left(\alpha x-\alpha^3\int g\mathrm{d}t\right). \tag{2.71}$$

将 (2.71) 代入 (2.68) 给出方程 (2.60) 的一类孤子解

$$u=3c\alpha^2\mathrm{sech}^2\left[\frac{\alpha}{2}(x-\alpha^2\int g\mathrm{d}t)\right].$$

下面仍利用假设 (2.64) 寻找方程 (2.60) 的相似约化. 只需将方程 (2.63) 改写为关于 w 的幂次形式

$$\begin{aligned}&f\phi_x^5w''w'''+g\phi_x^5w^{(5)}+f\phi_x^3\phi_{xx}(3w''^2+w'w'')+10g\phi_x^3\phi_{xx}w^{(4)}\\&+(\phi_t\phi_x^2+f\phi_x^3\tilde{u}+15g\phi_x\phi_{xx}^2+10g\phi_x^2\phi_{xxx})w'''+(f\phi_x^2\phi_{xxx}\\&+3f\phi_x\phi_{xx}^2)w'w''+(2\phi_x\phi_{xt}+\phi_x\phi_{xx}+3f\phi_x\phi_{xx}\tilde{u}+10f\phi_{xx}\phi_{xxx}\\&+5g\phi_x\phi_{xxxx}+f\phi_x^2\tilde{u}_x)w''+f\phi_{xx}\phi_{xxx}w'^2+(\phi_{xxt}+f\phi_{xx}\tilde{u}_x\\&+f\phi_{xxx}\tilde{u}+g\phi_{xxxxx})w'+(\tilde{u}_t+f\tilde{u}\tilde{u}_x+g\tilde{u}_{xxx})=0.\end{aligned} \tag{2.72}$$

为使方程 (2.72) 为 w 关于 ϕ 的常微分方程，要求 w 的各系数之比仅为 ϕ 的函数，以 $w''w'''$ 的系数作为规范系数，则有

$$g\phi_x^5=f\phi_x^5\Gamma_1(\phi), \tag{2.73}$$

$$f\phi_x^3\phi_{xx}=f\phi_x^5\Gamma_2(\phi), \tag{2.74}$$

$$g\phi_x^3\phi_{xx}=f\phi_x^5\Gamma_3(\phi), \tag{2.75}$$

$$\phi_t\phi_x^2+f\phi_x^3\tilde{u}+15g\phi_x\phi_{xx}^2+10g\phi_x^2\phi_{xxx}=f\phi_x^5\Gamma_4(\phi), \tag{2.76}$$

$$f\phi_x^2\phi_{xxx}+3f\phi_x\phi_{xx}^2=f\phi_x^5\Gamma_5(\phi), \tag{2.77}$$

$$2\phi_x\phi_{xt}+\phi_x\phi_{xx}+3f\phi_x\phi_{xx}\tilde{u}+10f\phi_{xx}\phi_{xxx}+5g\phi_x\phi_{xxx}+f\phi_x^2\tilde{u}_x=f\phi_x^5\Gamma_6(\phi), \tag{2.78}$$

$$f\phi_{xx}\phi_{xxx} = f\phi_x^5\Gamma_7(\phi), \tag{2.79}$$

$$\phi_{xxt} + f\phi_{xx}\tilde{u}_x + f\phi_{xxx}\tilde{u} + g\phi_{xxxxx} = f\phi_x^5\Gamma_8(\phi), \tag{2.80}$$

$$\tilde{u}_t + f\tilde{u}\tilde{u}_x + g\tilde{u}_{xxx} = f\phi_x^5\Gamma_9(\phi), \tag{2.81}$$

其中 $\Gamma_i(w)$ $(i=1,2,\cdots,9)$ 为 ϕ 的待定函数.

利用 §3.1 中的规则 (a)~ (c), 可得方程 (2.73)~(2.81) 的一般解为

$$\Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma_4 = \Gamma_5 = \Gamma_7 = \Gamma_8 = 0,\quad \Gamma_1 = c,$$

$$\Gamma_6 = A,\quad \Gamma_9 = -2(A^2\phi + B),\quad \tilde{u} = -\frac{1}{f\theta}(\theta' x + \sigma'),$$

其中 $\theta=\theta(t),\sigma=\sigma(t)$ 满足

$$\theta' = Af\theta^4,\quad f\sigma'' - (f' + 2Af^2\theta^3)\sigma' = 2f^3\theta^6(A^2\sigma + B). \tag{2.82}$$

方程 (2.60) 的相似解为

$$u = \theta^2 Q(\phi) - \frac{1}{f\theta}(\theta' x + \sigma'),\qquad \phi = \theta x + \sigma, \tag{2.83}$$

其中 $Q = w''$ 满足如下方程

$$cQ''' + QQ' + AQ - 2(A^2\phi + B) = 0. \tag{2.84}$$

我们进一步讨论三种情况:

(i) $A = B = 0$, 方程 (2.82) 的一般解为

$$\theta = \theta_0,\quad \sigma = c_1\int f\mathrm{d}t.$$

而方程 (2.83) 和 (2.84) 转化为

$$u = \theta_0^2 Q(\phi) - \frac{c_1}{\theta_0},\quad \phi = \theta_0 x + c\int f\mathrm{d}t,$$

$$cQ''' + QQ' = 0,$$

该方程具有 Weierstrass 椭圆函数解.

(ii) $A = 0, B \neq 0$, 方程 (2.82) 的一般解为

$$\theta = \theta_0,\quad \sigma = c_1\int f\mathrm{d}t + B\theta_0^6\Big(\int f\mathrm{d}t\Big)^2,$$

其中 θ_0, B 为任意常数，方程 (2.60) 相应的相似约化为

$$u=\theta_0^2Q(\phi)-\frac{1}{\theta_0}\Big(c_1+2B\theta_0^6\int f\mathrm{d}t\Big),\quad \phi=\theta_0x+c_1\int f\mathrm{d}t+B\Big(\int \mathrm{d}t\Big)^2,$$

而 Q 满足

$$cQ'''+QQ'-2B=0,$$

该方程为 Painlevé I 方程.

(iii) $A\neq 0$, 不失一般性，令 $A=-\frac{1}{3}, B=0$ $\Big($可做变换 $\sigma\to\sigma-\frac{2B}{A^2}\Big)$. 解方程 (2.81) 得到

$$\theta=\Big(\int f\mathrm{d}t\Big)^{-\frac{1}{3}},\quad \sigma=\Big(\int f\mathrm{d}t\Big)^{\frac{2}{3}}.$$

方程 (2.60) 相应的相似约化为

$$u=\Big(\int f\mathrm{d}t\Big)^{-\frac{2}{3}}Q(\phi)+\frac{1}{3}\Big(\int f\mathrm{d}t\Big)^{-1}\Big(x-2\int f\mathrm{d}t\Big),$$

$$\phi=\Big(\int f\mathrm{d}t\Big)^{-\frac{1}{3}}x+\Big(\int f\mathrm{d}t\Big)^{\frac{2}{3}},$$

而 Q 满足

$$cQ'''+QQ'+AQ-2A^2\phi=0,$$

该方程等价于 Painlevé II 方程.

第3章　非线性发展方程族及其换位表示

这一章，直接从谱问题 $\psi_x = U(u,\lambda)\psi$ 出发并利用泛函梯度，给出产生非线性发展方程族及其两种换位表示的一般的方法.

§3.1　引　　言

我们知道 Lax 表示和零曲率表示是非线性发展方程两种换位表示，零曲率方程在可积系统中起着重要作用，许多非线性发展方程都是基于零曲率方程而得到的 [1,2,14,15].

定义 3.1.1　*谱算子 $U(x,t)$ 在 u 点沿 ξ 方向的 Gateaux 导数定义为*

$$U'(\xi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}U(u+\varepsilon\xi)\mid_{\varepsilon=0},$$

其中 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p)^{\mathrm{T}}$.

定义 3.1.2　*设 $\nabla\lambda = \left(\frac{\delta\lambda}{\delta u_1}, \frac{\delta\lambda}{\delta u_2}, \cdots, \frac{\delta\lambda}{\delta u_p}\right)^{\mathrm{T}}$ 为 λ 的泛函梯度，如果存在仅依赖于 u 的 $p\times p$ 矩阵积微分算子 K 和 J 使得*

$$K\nabla\lambda = \lambda^k J\nabla\lambda,$$

k 为常数，则称 K 和 J 为 Lenard 算子对.

利用 Lenard 算子对 K 和 J, 可定义 Lenard 递推序列

$$G_0 \in KerJ = \{G|JG=0\},\ \ KG_{j-1} = JG_j,\ \ j=1,2,\cdots \tag{3.1}$$

则向量场 $X(u) = JG_j$ 可产生联系谱问题 (3.1) 的一族非线性发展方程

$$u_t = X_m(u) = J(J^{-1}K)^m G_0,\ \ m=1,2,\cdots \tag{3.2}$$

下面我们研究方程族 (3.2) 的换位表示，对线性谱问题

$$\psi_x = U(u,\lambda)\psi, \tag{3.3}$$

或它的等价形式

$$L(u)\psi = \lambda\psi,$$

曹策问首先提出了换位表示的一般框架 [9], 其关键思想是寻找如下算子方程的解 $V=V(G)$

$$[V,L]=L'(KG)-L'(JG)L. \tag{3.4}$$

这里 K 和 J 是 Lenard 算子对, G 为任给的向量函数. 之后这种思想被马文秀和乔志军进一步发展和推广 [23,24,30,31]. 式 (3.3) 的一般谱问题可改写为

$$L(u,\lambda)\psi=\lambda^{\gamma}\psi, \tag{3.5}$$

其中 γ 为 $U(u,\lambda)$ 中 λ 的最高幂次, 乔志军提出了生成非线性发展方程族及其 Lax 表示的一般的方法, 这种方法的关键是推广方程 (3.4) 为如下形式

$$[V,L]=L'(KG)L^{\alpha}-L'(JG)L^{\beta}, \tag{3.6}$$

其中 α,β 为常数且 $\alpha<\beta$, 由此, 可导出许多著名的方程族如, AKNS, WKI, KN, BPT, Levi 以及它们的 Lax 表示 [23,24]. 马文秀深入研究了零曲率表示和代数结构 [27,28]. 获得零曲率表示的关键是寻找下列算子方程的解 $V=V(X)$[30]

$$V_x-[U,V]=U'(\Phi X)-\lambda U'(X), \tag{3.7}$$

其中 $u_t=\Phi^m f_0$ 为联系谱问题 (3.3) 的方程族, Φ 为由 (3.3) 决定的一个遗传对称, f_0 为初始向量场, X 为任意给定的函数.

§3.2 Lax 表示的一般方法

非线性方程族 (3.2) 的 Lax 表示可利用如下定理构造 [23,24].

定理 3.2.1 假设

(a) $G_0\in\mathrm{Ker}J=\{G|JG=0\}$,

(b) 对任给的向量函数 $G=(G^{(1)},G^{(2)},\cdots,G^{(p)})^{\mathrm{T}}$, 方程 (3.6) 具有算子 $V=V(G)$.

令

$$W_m=\sum_{j=0}^{m}V_{j-1}L^{(m-j)\eta-\alpha}$$

其中 $\eta=\beta-\alpha$, $V_j=V(G_{j-1})$, $G_{j-1}=(G_{j-1}^{(1)},G_{j-1}^{(2)},\cdots,G_{j-1}^{(p)})$ 为由 (3.1) 定义的 Lenard 序列, 则有

$$[W_m,L]=L'(X_m),\quad m=0,1,2,\cdots \tag{3.8}$$

证明 利用 (a)~(b), 有

$$\begin{aligned}[W_m, L] &= \sum_{j=1}^{m}[V_{j-1}, L]L^{(m-j)\eta-\alpha} \\ &= \sum_{j=1}^{m} L'(KG_{j-1})L^{(m-j)\eta} - L'(JG_{j-1})L^{(m-j+1)} \\ &= L'(JG_m) = L'(X_m).\end{aligned}$$

定理 3.2.2 设定理 3.2.1 的条件成立, 且 L' 为单射, 则方程族 (3.2) 具有 Lax 表示

$$L = [W_m, L]. \tag{3.9}$$

证明 注意到 $L_t = L'(u_t)$, 则由定理 1, 有

$$L_t - [W_m, L] = L'(u_t) - L'(X_m) = L'(u_t - X_m).$$

由于 L' 为内射, 知道 $u_t = X_m(u)$ 当且仅当 $L_t = [W_m, L]$.

例 3.2.3 考虑 Tu 谱问题 [22]

$$\psi_x = U\psi = \begin{pmatrix} -\lambda - v/\lambda & u - v/\lambda \\ u + v/\lambda & \lambda + v/\lambda \end{pmatrix}\psi, \tag{3.10}$$

其中 λ 为参数; $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 为势函数, $\psi = (\psi_1, \psi_2)^{\mathrm{T}}$.

取

$$K = \begin{pmatrix} -2\partial & -2v \\ 2v & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} -2\partial^{-1} & 2\partial^{-1}u \\ 2u\partial^{-1} - 1 & -2u\partial^{-1}u + u \end{pmatrix}$$

则有

$$K\nabla\lambda = \lambda^2 J\nabla\lambda.$$

由下列递推关系, 定义 Lenard 序列 $\{G_j\}$

$$G_0 = (1,1)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{Ker}J, \quad KG_{2j} = JG_{2(j+1)}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.11}$$

则向量场 $X_m = JG_{2m}$ 生成 Tu 非线性方程族

$$(u_t, v_t)^{\mathrm{T}} = X_m, \quad m = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.12}$$

其中前两个典型方程为

$$u_t = u_x + 2v, \qquad v_t = -2uv.$$

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{1}{2}v_{xx} - \left(\frac{3}{2}u^2 + v\right)u_x - uv_x - u^2v - 2v^2$$
$$v_t = -\frac{1}{2}vu_{xx} - vv_x + vu^3 + 2uv^2.$$

当 $u=v$ 时，第二个方程组化为 MKdV 方程

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{2}u^2u_x.$$

下面构造方程族 (3.12) 的 Lax 表示. 首先将谱问题 (3.10) 转化为等价形式

$$L\psi = \lambda\psi, \quad L = \begin{pmatrix} -\partial - v/\lambda & u - v/\lambda \\ -u - v/\lambda & \partial - v/\lambda \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Gateaux 导数算子 L' 为

$$L'(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 \\ -\xi_1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_2 & \xi_2 \\ \xi_2 & \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

其中 $L' : \xi \to L(\xi)$ 为内射. 在方程 (3.6) 中，取 $\alpha = 1, \beta = 2$, 对任意光滑函数 $G = (G^{(1)}, G^{(2)})^{\mathrm{T}}$, 我们希望得到下列方程的解 $V = V(G)$

$$[V, L] = L'(KG)L - L'(JG)L^2. \tag{3.14}$$

为此，记

$$L = L_0 + L_{-1}\lambda^{-1} + L_1\partial, V(G) = V_0 + V_1L, \tag{3.15}$$

其中

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u & 0 \end{pmatrix}, L_{-1} = \begin{pmatrix} v & -v \\ -v & -v \end{pmatrix}, L_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

并假设 $V = V_0 + V_1\lambda$, 其中

$$V_0 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$$

而 A, B, C, D, E 和 F 为待定的函数.

将 (3.15) 代入 (3.14) 并直接计算，可得到

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -G^{(1)} \\ -G^{(1)} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}G^{(2)} & -\frac{1}{2}G^{(2)} \\ \frac{1}{2}G^{(2)} & -\frac{1}{2}G^{(2)}L \end{pmatrix}$$

最后我们取

$$W_m = \sum_{j=1}^{m} \begin{pmatrix} 0 & -G^{(1)}_{2(j-1)} \\ -G^{(1)}_{2(j-1)} & 0 \end{pmatrix} L^{2(m-j)} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}G^{(2)}_{2(j-1)} & -\frac{1}{2}G^{(2)}_{2(j-1)} \\ \frac{1}{2}G^{(2)}_{2(j-1)} & -\frac{1}{2}G^{(2)}_{2(j-1)} \end{pmatrix} L^{2(m-j)+1},$$

其中 $G_j = (G^{(1)}, G^{(2)})^{\mathrm{T}} (j = 1, 2, \cdots, m)$ 为由 (3.10) 定义的 Lenard 序列，根据定理 3.2.1 和 3.2.2, Tu 方程族 (3.12) 的 Lax 表示为

$$L_t = [W_m, L].$$

§3.3 零曲率表示的一般方法

这里我们直接从谱问题 (3.3) 并利用泛函梯度，提出产生非线性发展方程族及其零曲率表示的一种简单而一般的方法 [32]. 这种方法的关键是寻找下列算子方程的解

$$V_x - [U, V] = U'(KG) - \lambda^{\beta} U'(JG), \tag{3.16}$$

其中 β 为常数. 应当指出在换位表示过程中，方程 (3.16) 中的参数 λ 比方程 (3.6) 中的算子 L 更容易计算, 方程 (3.16) 也是算子方程 (3.7) ($\beta = 1$) 的推广. 在构造复杂的方程族如， KN, Geng, BPT, Tu 族的零曲率表示时，方程 (3.16) 比方程 (3.7) 更有效 [15,26]. 方程族 (3.2) 的零曲率表示可利用如下定理构造.

定理 3.3.1 假设

(a) $G_0 \in \mathrm{Ker}J = \{G | JG = 0\}$,

(b) 对任给的向量函数 $G = (G^{(1)}, G^{(2)}, \cdots, G^{(p)})^{\mathrm{T}}$, 方程 (3.16) 具有算子 $V = V(G)$.

令

$$V_m = \sum_{j=1}^{m} V_j \lambda^{\beta(m-j)},$$

其中 $V_j = V(G_{j-1})$, $G_{j-1} = (G^{(1)}_{j-1}, G^{(2)}_{j-1}, \cdots, G^{(p)}_{j-1})$ 为由 (3.1) 定义的 Lenard 序列，则有

$$V_{mx} - [U, V_m] = U'(X_m).$$

证明 利用 (a)~(b), 有

$$\begin{aligned} V_{mx} - [U, V_m] &= \sum_{j=1}^{m} (V_{jx} - [U, V_j]) \lambda^{\beta(m-j)} \\ &= \sum_{j=1}^{m} [U'(JG_j)\lambda^{\beta(m-j)} - U'(JG_{j-1})\lambda^{\beta(m-j+1)}] = U'(X_m). \end{aligned}$$

定理 3.3.2 假设定理 3.3.1 的条件满足，且 U' 为内射，则方程族 (3.2) 具有零曲率表示

$$U_t - V_{mx} + [U, V_m] = 0.$$

证明 注意到 $U_t = U'(u_t)$, 则由定理 1, 有

$$U_t - V_{mx} + [U, V_m] = U'(u_t) - U'(X_m) = U'(u_t - X_m) = 0.$$

由于 U' 为内射，知道 $u_t = X_m(u)$ 当且仅当 $U_t - V_{mx} + [U, V_m] = 0$.

下面我们通过两个例子说明方程 (3.16) 的应用.

例 3.3.3 考虑 Li 谱问题 [22]

$$\psi_x = U\psi = \begin{pmatrix} -\lambda + v & u + v \\ u - v & \lambda - v \end{pmatrix} \psi, \tag{3.17}$$

其中 λ 为参数； $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 为势函数， $\psi = (\psi_1, \psi_2)^{\mathrm{T}}$.

由 (3.17), 得到

$$\nabla\lambda = \left(\frac{\delta\lambda}{\delta u}, \frac{\delta\lambda}{\delta v}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\int 2\psi_1\psi_2 dx\right)^{-1} (\psi_2^2 - \psi_1^2, \psi_1^2 + 2\psi_1\psi_2 + \psi_2^2)^{\mathrm{T}}$$

和

$$(\psi_2^2 - \psi_1^2)_x = 2\lambda(\psi_1^2 + \psi_2^2) - 2v(\psi_1^2 + 2\psi_1\psi_2 + \psi_2^2),$$

$$(\psi_1^2 + 2\psi_1\psi_2 + \psi_2^2)_x = 2\lambda(\psi_2^2 - \psi_1^2) + 2u(\psi_1^2 + 2\psi_1\psi_2 + \psi_2^2),$$

$$\lambda(\psi_1^2 + \psi_2^2)_x = \lambda(\psi_1^2 + 2\psi_1\psi_2 + \psi_2^2)_x - u(\psi_2^2 - \psi_1^2)_x - v(\psi_1^2 + 2\psi_1\psi_2 + \psi_2^2)_x.$$

进一步，有

$$K\nabla\lambda = \lambda J\nabla\lambda,$$

其中 K 和 J 为两个斜对称算子

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \partial^2 - 2\partial u \\ -\partial^2 - 2u\partial & -2\partial v - 2v\partial \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 2\partial & 0 \\ 0 & -2\partial \end{pmatrix}.$$

由下列递推关系，定义 Lenard 序列 $\{G_j\}$

$$G_0 = (1,1)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{Ker} J, \quad KG_{j-1} = JG_j, \quad j = 1, 2, \cdots \tag{3.18}$$

则向量场 $X_m = JG_m$ 生成 Li 非线性方程族

$$(u_t, v_t)^{\mathrm{T}} = X_m = J(J^{-1}K)^m G_0, \quad m = 1, 2, \cdots \tag{3.19}$$

其中前两个典型方程为

$$u_t = -2u_x, \quad v_t = -2v_x.$$

$$u_t = v_{xx} - 2(uv)_x, \quad v_t = u_{xx} + 2uu_x - 6vv_x.$$

当 $u = v$ 时，第二个方程组转化为 Burgers 方程

$$u_t + 4uu_x - u_{xx} = 0.$$

下面构造方程族 (3.19) 的零曲率表示.
Gateaux 导数算子 U' 为

$$U'(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_2 & \xi_1+\xi_2 \\ \xi_1-\xi_2 & -\xi_2 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

其中 $U' : \xi \to U(\xi)$ 为内射. 在方程 (3.16) 中, 取 $\beta = 1$, 对任意光滑函数 $G = (G^{(1)}, G^{(2)})^{\mathrm{T}}$, 我们希望得到下列方程的解 $V = V(G)$

$$V_x - [U, V] = U'(KG) - \lambda U'(JG). \tag{3.20}$$

为此, 记 $U = U_0 + U_1\lambda$, 其中

$$U_0 = \begin{pmatrix} v & u+v \\ u-v & -v \end{pmatrix}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

并假设 $V = V_0 + V_1\lambda$, 其中

$$V_0 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$$

而 A, B, C, D, E 和 F 为待定的函数.

直接计算得到

$$\begin{aligned} V_x - [U, V] &= (V_{0x} + [V_0, U_0]) + (V_{1x} + [V_0, U_1] + [V_1, U_0])\lambda + [V_1, U_1]\lambda^2 \\ &= \begin{pmatrix} A_x + (u-v)B - (u+v)C & B_x - 2vB + (u+v)(A-D) \\ C_x + 2vC - (u+v)(A-D) & D_x - (u-v)B + (u+v)C \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} E_x & (u+v)(E-F) + 2B \\ -(u-v)(E-F) - 2C & F_x \end{pmatrix}\lambda, \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$KG = \begin{pmatrix} G_{xx}^{(2)} - 2\partial u G^{(2)} \\ G_{xx}^{(1)} + 2uG_x^{(1)} + 2\partial v G^{(2)} + 2vG_x^{(2)} \end{pmatrix}, \quad JG = \begin{pmatrix} 2G_x^{(1)} \\ -2G_x^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

将 (3.21) 和 (3.22) 代入 (3.20) 比较系数得

$$A = -D = -G_x^{(1)} - 2vG^{(2)}, \quad B = (G^{(2)} - G^{(1)})_x - 2(u+v)G^{(2)},$$

$$C = (G^{(1)} + G^{(2)})_x - 2(u-v)G^{(2)}, \quad E = -F = 2G^{(2)}.$$

因此方程 (3.20) 的算子解为

$$V = \begin{pmatrix} -G_x^{(1)} - 2vG^{(2)} & (G^{(2)} - G^{(1)})_x - 2(u+v)G^{(2)} \\ (G^{(1)} + G^{(2)})_x - 2(u-v)G^{(2)} & G_x^{(1)} + 2vG^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 2G^{(2)} & 0 \\ 0 & -2G^{(2)} \end{pmatrix} \lambda.$$

最后我们取

$$V_m = \sum_{j=1}^{m} \begin{pmatrix} -G_{jx}^{(1)} - 2vG_j^{(2)} & (G_j^{(2)} - G_j^{(1)})_x - 2(u+v)G_j^{(2)} \\ (G_j^{(1)} + G_j^{(2)})_x - 2(u-v)G_j^{(2)} & G_{jx}^{(1)} + 2vG_j^{(2)} \end{pmatrix} \lambda^{m-j}$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \begin{pmatrix} 2G_j^{(2)} & 0 \\ 0 & -2G_j^{(2)} \end{pmatrix} \lambda^{m-j+1}, \tag{3.23}$$

其中 $G_j = (G^{(1)}, G^{(2)})^{\mathrm{T}} (j = 1, 2, \cdots, m)$ 为由 (3.18) 定义的 Lenard 序列，根据定理 3.1.1 和 3.1.2, Li 方程族 (3.11) 的零曲率表示为

$$U_t - V_{mx} + [U, V_m] = 0.$$

例 3.3.4 *考虑 BPT 谱问题* [15]

$$\psi_x = U\psi = \begin{pmatrix} \lambda + \frac{1}{2}s\lambda^{-1} & \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}r\lambda^{-1} \\ \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}r\lambda^{-1} & -\lambda - \frac{1}{2}s\lambda^{-1} \end{pmatrix} \psi, \tag{3.24}$$

其中 λ 为参数，$q(x,t), r(x,t)$ 和 $s(x,t)$ 为三个位势函数.

利用 (3.16), 有

$$\nabla\lambda = \left(\int \lambda^{-1} (r\psi_1^2 + 2s\psi_1\psi_2 + r\psi_2^2 - 2\lambda^2 \psi_1\psi_2) dx \right)^{-1}$$
$$\times (\lambda(\psi_2^2 - \psi_1^2), \psi_1^2 + \psi_2^2, 2\psi_1\psi_2)^{\mathrm{T}}$$

以及

$$\lambda(\psi_1^2-\psi_2^2)_x=2\lambda^2(\psi_1^2+\psi_2^2)+s(\psi_1^2+\psi_2^2)+2r\psi_1\psi_2,$$

$$\lambda(\psi_1^2+\psi_2^2)_x=2\lambda^2(\psi_1^2-\psi_2^2)+s(\psi_1^2-\psi_2^2)+2\lambda q\psi_1\psi_2,$$

$$2\lambda(\psi_1\psi_2)_x=q\lambda(\psi_1^2+\psi_2^2)-r(\psi_1^2-\psi_2^2).$$

于是

$$K\nabla\lambda=\lambda^2J\nabla\lambda,$$

其中 K 和 J 为两个斜对称算子

$$K=\begin{pmatrix}\partial & s & r\\ -s & 0 & 0\\ -r & 0 & 0\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ 2 & \partial & -q\\ 0 & q & -\partial\end{pmatrix}.$$

现定义 Lenard 递推序列如下

$$G_0=(q,0,2)^{\mathrm{T}}\in\mathrm{Ker}J,\quad KG_{j-1}=JG_j,\quad j=1,2,\cdots \tag{3.25}$$

则向量场 $X_m=JG_m$ 与 BPT 族相联系:

$$(q_t,r_t,s_t)^{\mathrm{T}}=X_m=J(J^{-1}K)^mG_0,\quad m=1,2,\cdots \tag{3.26}$$

其中前两个典型方程为

$$q_t=q_x+2r,\quad r_t=-qs,\quad s_t=-qr.$$

$$q_t=\left(\frac{1}{4}\partial^2-\frac{1}{4}\partial q\partial^{-1}q-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}r\partial^{-1}q\right)(q_x+2r)-\frac{1}{2}\partial sq+\frac{1}{2}\partial q\partial^{-1}qr+r\partial qr,$$

$$r_t=-\frac{1}{4}sq_{xx}+\frac{1}{8}sq^3-\frac{1}{2}sr_x+sq\partial^{-1}qr-\frac{1}{2}s^2q,$$

$$s_t=-\frac{1}{4}rq_{xx}+\frac{1}{8}rq^3-\frac{1}{2}rr_x+rq\partial^{-1}qr-\frac{1}{2}sqr.$$

特别取 $r=s=0$, 第二个方程约化为 MKdV 方程

$$q_t+\frac{3}{8}q^2q_x-\frac{1}{4}q_{xxx}=0.$$

下面考虑 BPT 族 (3.26) 的零曲率表示, Gateaux 导数 U' 为

$$U'(\xi)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\xi_3\lambda^{-1} & \frac{1}{2}\xi_1+\frac{1}{2}\xi_2\lambda^{-1}\\ \frac{1}{2}\xi_1-\frac{1}{2}\xi_2\lambda^{-1} & -\frac{1}{2}\xi_3\lambda^{-1}\end{pmatrix},\quad \xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^{\mathrm{T}}.$$

在 (3.6) 中，取 $\beta=2$, 用类似于例 3.1.1 的方法，对任意的函数 $G=(G^{(1)},G^{(2)},G^{(3)})^{\mathrm{T}}$, 可以证明算子方程

$$V_x-[U,V]=U'(KG)-\lambda^2U'(JG) \tag{3.27}$$

有解

$$V=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & G^{(1)}\\ G^{(1)} & 0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}G^{(3)} & -G^{(2)}\\ G^{(2)} & -G^{(3)}\end{pmatrix}\lambda\overset{\mathrm{def}}{=}V_0+V_1\lambda.$$

事实上，可以将 $U(u,\lambda)$ 表示为形式

$$U=U_0\lambda^{-1}+U_1+U_2\lambda,$$

其中

$$U_0=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}s & r\\ -r & -s\end{pmatrix},\quad U_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & q\\ q & 0\end{pmatrix},\quad U_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

通过直接计算，知

$$\begin{aligned}
&V_x-[U,V]\\
&=[V_0,U_0]\lambda^{-1}+(V_{0x}+[V_0,U_1]+[V_1,U_0])+(V_{1x}+[V_1,U_1]+[V_0,U_2)\lambda+[V_2,U_2]\lambda^2\\
&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-rG^{(1)} & -sG^{(1)}\\ sG^{(1)} & rG^{(1)}\end{pmatrix}\lambda^{-1}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & G_x^{(1)}+sG^{(2)}+rG^{(3)}\\ G_x^{(1)}+sG^{(2)}+rG^{(3)} & 0\end{pmatrix}\\
&\quad+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}G_x^{(3)}-qG^{(2)} & -G_x^{(2)}+qG^{(3)}\\ G_x^{(2)}-qG^{(3)} & -G_x^{(3)}+qG^{(2)}\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0 & G^{(2)}\\ G^{(2)} & 0\end{pmatrix}\lambda^2.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

另一方面，注意到

$$KG=\begin{pmatrix}G_x^{(1)}+sG^{(2)}+rG^{(3)}\\ -sG^{(1)}\\ -rG^{(1)}\end{pmatrix},\quad JG=\begin{pmatrix}-2G^{(2)}\\ G_x^{(2)}+2G^{(1)}-qG^{(3)}\\ -G_x^{(3)}+qG^{(2)}\end{pmatrix},$$

不难验证 $U'(KG)-\lambda^2U'(JG)$ 等于 (3.28) 的右边，因此 (3.27) 得到证明.

利用定理 3.3.1 和 3.3.2, BPT 族 (3.26) 拥有零曲率表示

$$U_t-V_{mx}+[U,V_m]=0,$$

其中

$$V_m=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\begin{pmatrix}0 & G_j^{(1)}\\ G_j^{(1)} & 0\end{pmatrix}\lambda^{2(m-j)}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\begin{pmatrix}G_j^{(3)} & -G_j^{(2)}\\ G_j^{(2)} & -G_j^{(3)}\end{pmatrix}\lambda^{2(m-j)+1}$$

而 $G_j=(G_j^{(1)},G_j^{(2)},G_j^{(3)})^{\mathrm{T}}$ 为由 (3.25) 定义的 Lenard 序列.

第4章　可积系统和 Hamilton 结构

在这一章,通过引入带有一个任意常数的谱问题,导出一个广义 Kaup-Newell 型非线性方程族，这族方程的重要性主要表现在两个方面，首先，在数学上有很好的性质，如在 Liouville 意义下可积并具有 multi-Hamilton 结构；在物理上，与 Kundu 方程， Kaup-Newell 方程， Chen-Lee-Liu 方程， Gerdjikov-Ivanov 方程， MKdV 方程， Burgers 方程和 Sharma-Tasso-Olever 等方程密切联系.

§4.1　广义 Kaup-Newell 型方程族及其 multi-Hamilton 结构

我们知道,从一个谱问题出发可导出一族发展方程,但在孤立子和可积系统研究中,一个十分重要而困难的课题是如何引入合适的谱问题,使所得到方程族与更多有物理意义的方程相联系，如著名的 AKNS 系统与 KdV 方程、 MKdV 方程、 Schrödinger 方程等密切联系. 但由于尚无一般的方法可利用，在这方面的工作难度很大. Bi-Hamilton 结构是证明非线性方程完全可积性的一种直接而优美的方法 [38,81~84], 如果一方程可表示为彼此相容一组 Hamilton 系统，则根据 Magri 定理 [81], 可得到两两对合的 Hamilton 守恒密度族. 近年来，屠规章教授发展了产生无穷维 Hamilton 系统的迹恒等式法 [15], 从一个适当的谱问题出发，许多可积族及其 Hamilton 结构如 AKNS, TC, TA, BPT, Yang 族都可建立起来 [14,15]. 曹策问提出了从各类孤子族中获得有限维 Hamilton 系统的非线性化技巧 [10], 在位势函数和特征函数的 Bargmann 或 Neumann 约束下，将特征值问题非线性化为一有限维可积系统，如 KdV, AKNS, Jaulent-Miodek, Kaup-Newell 族等 [10~13]. 这种方法的另一个重要应用是将与特征值相联系的孤子方程的求解问题转化为求解相容的常微分方程 [85~87]. 之后，这种方法被曾云波教授、李翊神教授发展为更一般的方法用来处理高维约束以及从无穷维 Hamilton 系统获得有限维 Hamilton 系统 [18,19,88].

考虑谱问题

$$y_x = Uy = \begin{pmatrix} -i\lambda^2 - i\beta qr & \lambda q \\ \lambda r & i\lambda^2 + i\beta qr \end{pmatrix} y, \tag{4.1}$$

其中 q, r 为两个位势， β 为参数. 这种谱问题可看作 Kaup-Newell 谱问题的一

种相似推广 [19,123]. 作变换

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} \exp\left(-i\beta\int qr\mathrm{d}x\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i\beta\int qr\mathrm{d}x\right) \end{pmatrix} y,$$

$$q = \tilde{q}\exp\left(-2i\beta\int \tilde{q}\tilde{r}\mathrm{d}x\right), \quad r = \tilde{r}\exp\left(2i\beta\int \tilde{q}\tilde{r}\mathrm{d}x\right), \tag{4.2}$$

并经简单的计算, 我们发现 (4.1) 等价于标准的 Kaup-Newell 谱问题

$$\tilde{y}_x = \begin{pmatrix} -i\lambda^2 & \lambda\tilde{q} \\ \lambda\tilde{r} & i\lambda^2 \end{pmatrix} \tilde{y}. \tag{4.3}$$

联系谱问题 (4.3) 的导数 Schödinger 方程通常称为 Kaup-Newell 方程 [19,123]

$$iq_t + q_{xx} + i(|q|^2 q)_x = 0. \tag{4.4}$$

近年来, 为研究高阶扰动项的影响, 人们提出了各类推广和修正的导数 Schödinger 方程, 如 Chen-Lee-Liu 方程 [124,125]

$$iq_t + q_{xx} + i|q|^2 q_x = 0 \tag{4.5}$$

和 Gerjikov-Ivanov 方程 [126,127]

$$iq_t + q_{xx} - iq^2 q_x^* + \frac{1}{2}|q|^4 q = 0, \tag{4.6}$$

其中 q^* 表示 q 的复共轭. 方程 (4.4)~(4.6) 分别称为 DNLSI, DNLSII 和 DNLSIII 方程. Kundu 等发现这三个方程在规范意义下是等价的, 而且这种思想可推广到更一般的导数 Schödinger 型方程上 [128~131]. 近年来, 关于 Kaup-Newell 方程的谱问题, Hamilton 结构, Painlevé 性质, 精确解等被进行了广泛的研究 [19,42,123,127], 但在 Chen-Lee-Liu 方程和 Gerjikov-Ivanov 方程上的工作却很少, 主要是, 从原理上讲这两个方程可通过变换转化为 Kaup-Newell 方程的求解问题 [128,130]. 实际上, 要得到它们显式形式, 我们必须求解形如方程 (4.2) 的积分方程 [128,130], 随着积分次数的的增加, 这种积分往往变得越来复杂, 特别是对多孤子解情形, 因此为便于应用, 给出它们的显式结果十分必要.

对谱问题 (4.1) 的特殊情形: $\beta = 1/2$, 我们曾推导了 GI 方程族并构造了 GI 方程 (4.6) 的显式 Darboux 变换 [98]. 在这一节, 我们借助谱问题 (4.1) 用统一的方式研究三类方程 (4.4)~(4.6)[131]. 十分有趣的是, 从谱问题 (4.1) 出发导出的方程族与七种重要的物理方程密切联系, 如 Kundu 方程 [128,130], Kaup-Newell

方程，Chen-Lee-Liu 方程，Gerjikov-Ivanov 方程，MKdV 方程，Burgers 方程和 Sharma-Tasso-Olever 方程 [64,128,130]. 据我们所知，除了 Kaup-Newell 方程，其他五种方程都不能显式地出现在 Kaup-Newell 族中 [19,134], 同时只有 Gerjikov-Ivanov 方程和 MKdV 方程显式地出现在 Gerjikov-Ivanov 族 [98]. 我们首先推导联系谱问题 (4.1) 的一种 Kaup-Newell 型方程族，并利用迹恒等式进一步证明该方程族在 Liouville 意义下可积且具有多 Hamilton 结构 [15].

为从谱问题 (4.1) 出发，推导 Kaup-Newell 型方程族，首先求解谱问题 (4.1) 的伴随表示

$$V_x = [U, V] = UV - VU,$$

其中

$$V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & -a_j \end{pmatrix} \lambda^{-j},$$

可得到如下递推关系

$$\begin{aligned}
&a_{2j+1} = b_{2j} = c_{2j} = 0,\\
&a_{2jx} = qc_{2j+1} - rb_{2j+1} = -\beta qr\,(qc_{2j-1} - rb_{2j-1}) - \frac{1}{2}i\,(qc_{2j-1x} + rb_{2j-1x}),\\
&b_{2j+1} = \frac{1}{2}ib_{2j-1x} + iqa_{2j} - \beta qrb_{2j-1},\\
&c_{2j+1} = -\frac{1}{2}ic_{2j-1x} + ira_{2j} - \beta qrc_{2j-1}.
\end{aligned}$$

利用 Mathematica, 容易得到

$$\begin{aligned}
&a_0 = -2i,\quad b_1 = 2q,\quad c_1 = 2r.\quad a_2 = -iqr,\\
&b_3 = iq_x - (2\beta - 1)q^2r,\quad c_3 = -ir_x - (2\beta - 1)qr^2,\\
&a_4 = \frac{1}{4}[2\,(rq_x - qr_x) + i(8\beta - 3)q^2r^2],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&b_5 = \frac{1}{4}[-2q_{xx} - 6i(2\beta - 1)qrq_x - 4i\beta q^2r_x + (8\beta^2 - 12\beta + 3)q^3r^2],\\
&c_5 = \frac{1}{4}[-2r_{xx} + 6i(2\beta - 1)qrr_x + 4i\beta r^2q_x + (8\beta^2 - 12\beta + 3)q^2r^3],\\
&a_6 = \frac{1}{8}[2i(qr_{xx} + rq_{xx}) + 6(2\beta - 1)(q^2rr_x - qr^2q_x) - 2iq_xr_x\\
&\qquad -i\beta(24\beta^2 - 24\beta + 5)q^3r^3]
\end{aligned} \tag{4.7}$$

及

$$\begin{pmatrix} c_{2j+1} \\ b_{2j+1} \end{pmatrix} = L_1 L_2 \begin{pmatrix} c_{2j-1} \\ b_{2j-1} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \cdots \tag{4.8}$$

其中

$$L_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r\partial^{-1}r & -i + r\partial^{-1}q \\ i + q\partial^{-1}r & q\partial^{-1}q \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & \partial + 2i\beta qr \\ \partial - 2i\beta qr & 0 \end{pmatrix}$$

为斜对称算子，即 $L_1^* = -L_1, \quad L_2^* = -L_2$.

考虑辅助谱问题

$$y_t = V^{(m)} y, \tag{4.9}$$

其中

$$V^{(m)} = \begin{pmatrix} \Delta_m & 0 \\ 0 & -\Delta_m \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{m} \begin{pmatrix} a_{2j}\lambda^{2(m-j)+2} & b_{2j+1}\lambda^{2(m-j)+1} \\ c_{2j+1}\lambda^{2(m-j)+1} & -a_{2j}\lambda^{2(m-j)+2} \end{pmatrix}.$$

则 (4.1) 和 (4.9) 的相容性条件给出

$$-i\beta(qr)_t = -i\beta(q_t r + r_t q) = \Delta_{mx},$$

$$q_t = b_{2m+1x} + 2i\beta qr b_{2m+1} + 2q\Delta_m,$$

$$r_t = c_{2m+1x} - 2i\beta qr c_{2m+1} - 2r\Delta_m,$$

由此得到

$$\Delta_m = -i\beta\partial^{-1}(qc_{2m+1x} + rb_{2m+1x}) - 2\beta^2\partial^{-1}qr(qc_{2m+1} - rb_{2m+1}) = 2\beta a_{2(m+1)}$$

及

$$\begin{pmatrix} q_t \\ r_t \end{pmatrix} = L_3 L_2 \begin{pmatrix} c_{2m+1} \\ b_{2m+1} \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

其中

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 - 2i\beta q\partial^{-1}r & -2i\beta q\partial^{-1}q \\ 2i\beta r\partial^{-1}r & 1 + 2i\beta r\partial^{-1}q \end{pmatrix}.$$

因此，由 (4.8) 和 (4.10) 可得到联系谱问题 (4.1) 的 Kaup-Newell 型方程族

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_t \\ r_t \end{pmatrix} &= (L_3L_2) \begin{pmatrix} c_{2m+1} \\ b_{2m+1} \end{pmatrix} = (L_3L_2)(L_1L_2) \begin{pmatrix} c_{2m-1} \\ b_{2m-1} \end{pmatrix} \\ &= (L_3L_2)(L_1L_2)^m \begin{pmatrix} 2r \\ 2q \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{4.11}$$

下面建立方程族 (4.11) 的 multi-Hamilton 结构并证明其在 Liouville 意义下可积，为应用迹恒等式，我们需要将 (4.11) 改写为另一形式，令

$$G_{2j+1}=(c_{2j+1}-2i\beta ra_{2j},b_{2j+1}-2i\beta qa_{2j})^{\mathrm{T}},$$

并记 $a_{2j}=\partial^{-1}(qc_{2j+1}-rb_{2j+1})$, 则有

$$(c_{2j+1},b_{2j+1})^{\mathrm{T}}=L_3^*G_{2j+1},\quad j\geq 0.$$

其中 L_3^* 表示 L_3 的共轭算子，方程族 (5.11) 可进一步写为

$$u_t=JG_{2m+1}=JLG_{2m-1}=\cdots=JL^mG_1, \tag{4.12}$$

其中，

$$G_1=(2(1-2\beta)r,2(1-2\beta)q)^{\mathrm{T}},\quad u=(q,r)^{\mathrm{T}},\quad J=L_3L_2L_3^*,\quad L=L_3^{*^{-1}}L_1L_2L_3^*.$$

命题 4.1.1　*所有算子 JL^k $(k=0,1,2,\cdots,m)$ 都是斜对称的.*

证明　由于 L_1 和 L_2 为斜对称的, 故算子 $J=L_3L_2L_3^*$ 和 $JL=L_3L_2L_1L_2L_3^*$ 也是斜对称的. 假设 JL^{k-1} 是斜对称的，则有

$$\begin{aligned}(JL^k)^* &=(JL^{k-1}L)^*=L^*(JL^{k-1})^*=-L^*JL^{k-1}\\&=L^*J^*L^{k-1}=-JLL^{k-1}=-JL^k,\end{aligned}$$

这说明 JL^k 是斜对称的.

取 Killing-Cartan 型 $\langle A,B\rangle$ 为 $\mathrm{tr}(AB)$, 则直接计算得到

$$\left\langle V,\frac{\partial U}{\partial q}\right\rangle=c\lambda-2i\beta ra,\quad \left\langle V,\frac{\partial U}{\partial r}\right\rangle=b\lambda-2i\beta qa,$$

$$\left\langle V,\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right\rangle=-4ia\lambda+rb+qc.$$

利用迹恒等式，我们有

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(-4ia\lambda+rb+qc\right)=\lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda^{\gamma}(c\lambda-ira,b\lambda-iqa)^{\mathrm{T}}\right).$$

其等价于

$$\frac{\delta}{\delta u}(-4ia_{2m+2}+rb_{2m+1}+qc_{2m+1})=(-2m+\gamma)G_{2m+1}. \tag{4.13}$$

为固定 (4.13) 中的 γ, 令 $m=0$, 得到 $\gamma=0$, 因此

$$G_{2m+1}=\frac{\delta H_m}{\delta u}, \tag{4.14}$$

其中

$$H_0=2qr,\quad H_m=\frac{4ia_{2m+2}-rb_{2m+1}-qc_{2m+1}}{2m},\quad m\geq 1. \tag{4.15}$$

(4.12) 与 (4.14) 结合便给出方程族 (4.11) 的 multi-Hamilton 结构

$$u_t=J\frac{\delta H_m}{\delta u}=JL\frac{\delta H_{m-1}}{\delta u}=\cdots=JL^m\frac{\delta H_0}{\delta u},\quad m=1,2,\cdots. \tag{4.16}$$

最后，讨论方程族 (4.11) 的可积性，关键是证明存在无穷多可换的守恒密度族. 通常函数 f 与 g 的内积定义为

$$(f,g)=\int f\cdot g\mathrm{d}x,$$

Poisson 括号定义为

$$\{f,g\}=\left(\frac{\delta f}{\delta u},J\frac{\delta g}{\delta u}\right),$$

特别，如果 $\{f,g\}=0$, 则称 f 与 g 是可换的.

命题 4.1.2 由 (4.15) 定义的 Hamilton 函数 $\{H_m\}$ $(m=0,1,\cdots)$ 构成方程族 (4.16) 的公共守恒密度族.

证明 由命题 4.1.1, 有

$$\{H_n,H_m\}=\left(\frac{\delta H_n}{\delta u},J\frac{\delta H_m}{\delta u}\right)=(L^nG_1,JL^mG_1)=(L^nG_1,L^*JL^{m-1}G_1)$$

$$=(L^{n+1}G_1,JL^{m-1}G_1)=\{H_{n+1},H_{m-1}\}.$$

重复上面讨论，得到

$$\{H_n,H_m\}=\{H_m,H_n\}=\{H_{m+n},H_0\}. \tag{4.17}$$

另一方面，有

$$\{H_m,H_n\}=(L^mG_1,JL^nG_1)=(J^*L^mG_1,L^nG_1)=-\{H_n,H_m\}. \tag{4.18}$$

于是结合 (4.17) 与 (4.18) 得到

$$\{H_m,H_n\}=0,$$

这表明 $\{H_m\}$ 是可换的.

进一步，有

$$\left(\int H_m \mathrm{d}x\right)_t = \left(\frac{\delta H_m}{\delta u}, u_t\right) = \left(\frac{\delta H_m}{\delta u}, J\frac{\delta H_n}{\delta u}\right) = \{H_m, H_n\} = 0.$$

这说明 $\{H_m\}$ 为守恒密度族.

概括起来，得到如下结论

定理 4.1.3. (i) 方程族 (4.16) 是 Liouville 意义下的可积 Hamilton 系统. (ii) Hamilton 函数 $\{H_m\}$ 构成方程族 (4.16) 的彼此可换守恒密度族.

§4.2 联系 Kaup-Newell 型方程族的几类重要方程

为表明我们推导 Kaup-Newell 型方程族 (4.11) 的物理兴趣，我们给出方程族的一个约化及所联系的几个重要方程，如 Kundu, Kaup-Newell, Chen-Lee-Liu, Gerjikov-Ivanov, MKdV 和 Sharma-Tasso-Olever 方程都可做为特殊的约化属于该方程族，特别是给出了这些方程 Lax 对， Hamilton 结构的显式表示.

例 4.2.1 广义 Kaup-Newell 型谱问题的一个约化.

当 $\beta=0$ 时，谱问题 (4.1) 约化为 Kaup-Newell 谱问题 (4.3)，而方程族 (4.11) 约化为 Kaup-Newell 族

$$u_t = JL^m\begin{pmatrix}2r\\2q\end{pmatrix},\quad m=1,2,\cdots \tag{4.19}$$

其中

$$J = L_3L_2L_3^*\,|_{\beta=0}=\begin{pmatrix}0 & \partial\\ \partial & 0\end{pmatrix},$$

$$K = L_3L_2L_1L_2L_3^*\,|_{\beta=0}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\partial q\partial^{-1}q\partial & i\partial^2+\partial q\partial^{-1}r\partial\\ -i\partial^2+\partial r\partial^{-1}q\partial & \partial r\partial^{-1}r\partial\end{pmatrix}.$$

显然， J 和 K 为两个斜对称算子． Kaup-Newell 族 (4.19) 可写为多 Hamilton 形式

$$u_t = J\frac{\delta H_m}{\delta u} = JL\frac{\delta H_{m-1}}{\delta u} = \cdots = JL^m\frac{\delta H_0}{\delta u},\quad m=1,2,\cdots$$

其中 H_m 由 (4.15) 决定 ($\beta=0$).

例 4.2.2 联系 Kaup-Newell 型方程族的几个重要方程.

方程族 (4.16) 中的第一个方程组 (即 $m=1$) 为耦合 Kundu 型方程组

$$\begin{aligned} &iq_t + q_{xx} + 2i(2\beta-1)qrq_x + i(4\beta-1)q^2r_x + \beta(4\beta-1)q^3r^2 = 0, \\ &ir_t - r_{xx} + 2i(2\beta-1)qrr_x + i(4\beta-1)r^2q_x - \beta(4\beta-1)q^2r^3 = 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

当 $r=-q^*$ 时, 其约化为如下 Kundu 方程 [128,130]

$$iq_t + q_{xx} - 2i(2\beta-1)|q|^2q_x - i(4\beta-1)q^2q_x^* + \beta(4\beta-1)|q|^4q = 0, \tag{4.21}$$

这一方程恰为 Kaup-Newell, Chen-Lee-Liu 和 Gerjikov-Ivanov 方程 (4.4)~(4.6) 的统一表达式, 分别对应情况 $\beta=0$, $\beta=1/4$ 和 $\beta=1/2$. 根据定理 4.1.3, 我们知道, Kundu 系统 (4.20) 在 Liouville 意义下可积并具有 Bi-Hamilton 结构

$$u_t = J\frac{\delta H_1}{\delta u} = JL\frac{\delta H_0}{\delta u},$$

其中 Hamilton 函数 H_0 和 H_1 为

$$H_0 = 2qr, \quad H_1 = \frac{1}{2}[i(rq_x - qr_x) - (4\beta-1)q^2r^2]. \tag{4.22}$$

对应系统 (4.20) 的 Lax 对由谱问题 (4.1) 和如下辅助谱问题构成

$$y_t = V^{(1)}y, \quad V^{(1)} = \begin{pmatrix} v_{11}^{(1)} & v_{12}^{(1)} \\ v_{21}^{(1)} & -v_{11}^{(1)} \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

其中

$$v_{11}^{(1)} = -2i\lambda^4 - iqr\lambda^2 + \beta(rq_x - qr_x) + \frac{1}{2}i\beta(8\beta-3)q^2r^2,$$

$$v_{12}^{(1)} = 2q\lambda^3 + [iq_x - (2\beta-1)q^2r]\lambda, \quad v_{21}^{(1)} = 2r\lambda^3 + [-ir_x - (2\beta-1)qr^2]\lambda.$$

当 $r=1, \beta=1/4$ 时, 方程 (5.20) 约化为复 Burgers 方程

$$iq_t + q_{xx} - iq_x = 0.$$

如果在谱问题 (5.1) 中, 令 $i\lambda \to \lambda$, 则该方程约化为实 Burgers 方程

$$q_t + qq_x - q_{xx} = 0.$$

利用 Mathematica, 我们容易发现方程族 (4.16) (即 $m=2$) 的第二个方程

为

$$\begin{aligned}&q_t+\frac{1}{4}[2q_{xxx}+6i(2\beta-1)r(qq_x)_x+6i(4\beta-1)qq_xr_x\\&\quad-6(2\beta-1)(4\beta-1)q^3rr_x-3(8\beta^2-12\beta+3)q^2r^2q_x\\&\quad+4i\beta(2\beta-1)(4\beta-1)q^4r^3]=0,\\&r_t+\frac{1}{4}[2r_{xxx}-6i(2\beta-1)q(rr_x)_x-6i(4\beta-1)rq_xr_x\\&\quad-6(2\beta-1)(4\beta-1)r^3qq_x-3(8\beta^2-12\beta+3)q^2r^2r_x\\&\quad-4i\beta(2\beta-1)(4\beta-1)q^3r^4]=0,\end{aligned}\tag{4.24}$$

当 $r=2, \beta=1/2$, 方程 (4.24) 恰可约化为 MKdV 方程

$$q_t+\frac{1}{2}(q_{xxx}+6q^2q_x)=0.$$

而当 $r=2, \beta=1/4$ 时，约化为复 Sharma-Tasso-Olever 方程

$$q_t+\frac{1}{2}\left[q_{xxx}-3i(qq_x)_x-3q^2q_x\right]=0.\tag{4.25}$$

如果在谱问题 (4.1) 中，令 $i\lambda\to\lambda$, 则方程 (4.25) 恰为曾被 Olever 和 Gudkov 等研究过的实 Sharma-Tasso-Olever 方程 [64,132]

$$q_t+\frac{1}{2}\left[q_{xxx}-3(qq_x)_x-3q^2q_x\right]=0.$$

方程 (4.24) 在 Liouville 意义下可积并具有 Tri-Hamilton 结构

$$u_t=J\frac{\delta H_2}{\delta u}=JL\frac{\delta H_1}{\delta u}=JL^2\frac{\delta H_0}{\delta u},$$

其中 Hamilton 函数 H_0, H_1 由 (4.22) 给出，而

$$H_2=\frac{1}{4}(4ia_6-rb_5-qc_5),$$

其中 a_6, b_5 和 c_5 由 (4.7) 确定.

对应方程 (4.24) 的 Lax 对由谱问题 (4.1) 和如下辅助谱问题构成

$$y_t=V^{(2)}y=\begin{pmatrix}v_{11}^{(2)} & v_{12}^{(2)}\\ v_{21}^{(2)} & -v_{11}^{(2)}\end{pmatrix}y,$$

其中

$$v_{11}^{(2)} = -2\lambda^6 + iqr\lambda^4 + \frac{1}{4}[2(qr_x - rq_x) + i(8\beta - 3)q^2r^2]\lambda^2 + 2\beta a_6,$$

$$v_{12}^{(2)} = 2q\lambda^5 + [iq_x - (2\beta - 1)q^2r]\lambda^3 + b_5\lambda,$$

$$v_{21}^{(2)} = 2r\lambda^5 + [-ir_x - (2\beta - 1)qr^2]\lambda^3 + c_5\lambda.$$

§4.3 联系广义 Kaup-Newell 型谱问题的一个有限维可积系统

这一节，在位势函数与特征函数的约束下，通过非线性化的技巧，得到一完全可积的 Bargmann 系统.

假设 $\lambda_j(j = 1, \cdots, N)$ 为方程 (4.1) 的不同特征值，(ψ_j, ϕ_j) 为有关的特征函数，则 λ_j 关于 $u = (q, r)^{\mathrm{T}}$ 的泛函梯度为

$$\frac{\delta\lambda_j}{\delta u} = \left(\frac{\delta\lambda_j}{\delta q}, \frac{\delta\lambda_j}{\delta r}\right)^{\mathrm{T}} = \gamma_j^{-1}(\lambda_j\phi_j^2 - 2i\beta r\psi_j\phi_j, -\lambda_j\psi_j^2 - 2i\beta q\psi_j\phi_j)^{\mathrm{T}},$$

其中 $\gamma_j = \int(q\phi_j^2 - r\psi_j^2 + 4i\lambda_j\psi_j\phi_j)\mathrm{d}x$.

命题 4.3.1 *J 和 $K = JL$ 为 Lenard 算子对*

$$K\frac{\delta\lambda_j}{\delta u} = \lambda_j^2 J\frac{\delta\lambda_j}{\delta u}, \tag{4.26}$$

而 $\{G_{2j+1}\}$ 构成 Lenard 序列

$$JG_{2j+3} = KG_{2j+1}, \quad j = 0, 1, \cdots \tag{4.27}$$

证明 利用谱问题 (4.1), 直接验证知道

$$L_3^*\frac{\delta\lambda_j}{\delta u} = \lambda_j\begin{pmatrix}\phi_j^2 \\ -\psi_j^2\end{pmatrix}, \tag{4.28}$$

$$L_1L_2\begin{pmatrix}\phi_j^2 \\ -\psi_j^2\end{pmatrix} = \lambda_j^2\begin{pmatrix}\phi_j^2 \\ -\psi_j^2\end{pmatrix}. \tag{4.29}$$

将 (4.28) 代入 (4.29) 后，再乘以 L_3L_2, 便得到 (4.26), 显然 (4.27) 可由 (4.12) 得到.

考虑 Bargmann 约束

$$G_1=\sum_{j=1}^{N}\gamma_j\frac{\delta\lambda_j}{\delta u},\tag{4.30}$$

或等价地

$$q=-\frac{\langle\wedge\psi,\psi\rangle}{2(1-2\beta+i\beta\langle\psi,\phi\rangle)},\quad r=\frac{\langle\wedge\phi,\phi\rangle}{2(1-2\beta+i\beta\langle\psi,\phi\rangle)},\tag{4.31}$$

其中 $\psi=(\psi_1,\cdots,\psi_N)^{\mathrm{T}},\phi=(\phi_1,\cdots,\phi_N)^{\mathrm{T}},\wedge=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$, 而 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 R^N 中标准的内积. 在 Bargmann 约束 (4.30) 下, 方程 (4.1) 被线性化为一有限维 Hamilton 系统

$$\begin{aligned}\psi_x&=-i\wedge^2\psi+\frac{i\beta\psi\langle\wedge\psi,\psi\rangle\langle\wedge\phi,\phi\rangle}{4(1-2\beta+i\beta\langle\psi,\phi\rangle)^2}-\frac{\wedge\phi\langle\wedge\psi,\psi\rangle}{2(1-2\beta+i\beta\langle\psi,\phi\rangle)}\\&=-\frac{\partial H}{\partial\phi},\\\phi_x&=i\wedge^2\phi-\frac{i\beta\phi\langle\wedge\psi,\psi\rangle\langle\wedge\phi,\phi\rangle}{4(1-2\beta+i\beta\langle\psi,\phi\rangle)^2}+\frac{\wedge\psi\langle\wedge\phi,\phi\rangle}{2(1-2\beta+i\beta\langle\psi,\phi\rangle)}\\&=\frac{\partial H}{\partial\psi}.\end{aligned}\tag{4.32}$$

其中 Hamilton 函数 H 为

$$H=\langle i\wedge^2\psi,\phi\rangle+\frac{\langle\wedge\psi,\psi\rangle\langle\wedge\phi,\phi\rangle}{2(1-2\beta+i\beta\langle\psi,\phi\rangle)}.\tag{4.33}$$

在辛空间 $(R^{2N},\mathrm{d}\psi\wedge\mathrm{d}\phi)$ 两个函数的 Poisson 括号定义为

$$(F,G)=\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial\psi_j}\frac{\partial G}{\partial\phi_j}-\frac{\partial F}{\partial\phi_j}\frac{\partial G}{\partial\psi_j}\right)=\left\langle\frac{\partial F}{\partial\psi},\frac{\partial G}{\partial\phi}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial F}{\partial\phi},\frac{\partial G}{\partial\psi}\right\rangle,$$

其为斜对称, 双线性并满足 Jacobi 恒等式. 特别 $(F,G)=0$ 时, 称 F 和 G 为可换的. 下面我们考虑函数系统

$$\begin{aligned}F_m&=2(1-2\beta+i\beta\langle\psi,\phi\rangle)\langle\wedge^{2m+2}\psi,\phi\rangle\\&\quad+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m}\begin{vmatrix}\langle\wedge^{2(m-j)+1}\psi,\psi\rangle&\langle\wedge^{2(m-j)+2}\psi,\phi\rangle\\\langle\wedge^{2j}\psi,\phi\rangle&\langle\wedge^{2j+1}\phi,\phi\rangle\end{vmatrix},\quad m=0,1,\cdots,\end{aligned}\tag{4.34}$$

命题 4.3.2　内积 $\left\langle\frac{\partial F_m}{\partial\psi},\frac{\partial F_n}{\partial\phi}\right\rangle$ 关于 m,n 对称的, 即

$$\left\langle\frac{\partial F_m}{\partial\psi},\frac{\partial F_n}{\partial\phi}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial F_n}{\partial\psi},\frac{\partial F_m}{\partial\phi}\right\rangle.\tag{4.35}$$

证明 注意到

$$\frac{\partial F_m}{\partial \psi} = 2i\beta\phi \left\langle \wedge^{2m+2}\psi, \phi\right\rangle + (2 + i\left\langle \psi, \phi\right\rangle) \wedge^{2m+2} \phi$$
$$+ \sum_{j=1}^{m}(\left\langle \wedge^{2(m-j)+1}\phi, \phi\right\rangle \wedge^{2j+1} \psi - \left\langle \wedge^{2(m-j)+2}\psi, \phi\right\rangle \wedge^{2j} \phi), \tag{4.36}$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial \phi} = 2i\beta\psi \left\langle \wedge^{2n+2}\psi, \phi\right\rangle + (2 + i\left\langle \psi, \phi\right\rangle) \wedge^{2n+2} \psi$$
$$+ \sum_{j=1}^{m}(\left\langle \wedge^{2(n-j)+1}\psi, \psi\right\rangle \wedge^{2j+1} \phi - \left\langle \wedge^{2(n-j)+2}\psi, \phi\right\rangle \wedge^{2j} \psi). \tag{4.37}$$

通过一系列计算，易见 $\left\langle \frac{\partial F_m}{\partial \psi}, \frac{\partial F_n}{\partial \phi}\right\rangle$ 为关于 m, n 对称项之和. 所以 (4.35) 成立.

命题 4.3.3 由 (4.34) 定义的函数是可换的，即

$$(F_m, F_n) = 0.$$

证明 由命题 4.3.2, 有

$$\begin{aligned}(F_m, F_n) &= \left\langle \frac{\partial F_m}{\partial \psi}, \frac{\partial F_n}{\partial \phi}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial F_m}{\partial \phi}, \frac{\partial F_n}{\partial \psi}\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial F_n}{\partial \psi}, \frac{\partial F_m}{\partial \phi}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial F_m}{\partial \phi}, \frac{\partial F_n}{\partial \psi}\right\rangle = 0.\end{aligned}$$

命题 4.3.4 $(H, F_m) = 0$.

证明 利用 (4.33) 和 (4.34), 通过直接计算，得到

$$(H, F_m) = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \psi}, \frac{\partial F_m}{\partial \phi}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial H}{\partial \phi}, \frac{\partial F_m}{\partial \psi}\right\rangle = 0.$$

综合以上结论，得到

定理 4.3.5 由 (4.32) 定义的 Hamilton 系统在辛流形 $(R^{2N}, \mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}\phi)$ 中 Liouville 意义下完全可积的.

定理 4.3.6 假设 (ψ, ϕ) 为 Bargmann 系统 (4.32) 的一个解，则由 (4.31) 决定的 q 和 r 满足稳定的 Kaup-Newell 型方程

$$X_{2N+1} + c_1 X_{2N-1} + \cdots + c_N X_1 = 0, \tag{4.38}$$

其中 $X_{2j+1} = JG_{2j+1}$, $j = 0, 1, \cdots, N$, 而 $c_1, c_2, \cdots, c_N$ 为适当选取的常量.

证明　在表达式 (4.30) 两边作用算子 $(J^{-1}K)^k$ 并利用 (4.26) 和 (5.27), 我们有

$$G_{2k+1}+\beta_1 G_{2k-1}+\cdots+\beta_k G_1+\beta_{k+1}G_{-1}=\sum_{j=1}^{N}\gamma\lambda_j^{2k}\gamma_j\frac{\delta\lambda_j}{\delta u}, \tag{4.39}$$

其中 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{k+1}$ 为任意常数， $G_{-1}=(0,0)^{\mathrm{T}}$, $\partial^{-1}0=1$. 考虑多项式

$$P(\lambda)=\prod_{j=1}^{N}(\lambda-\lambda_j^2)=p_0\lambda^N+\cdots+p_N,\quad p_0=1.$$

用算子 $J\sum\limits_{k=1}^{N}p_{N-k}$ 作用 (4.39), 便得到 (4.38), 其中 $c_1,\cdots,c_N$ 依赖于 $\beta_1,\cdots,\beta_{k+1}$ 及 $\lambda_1,\cdots,\lambda_N$.

§4.4　Kaup-Newell 型方程族的换位解

这里我们进一步给出 Kaup-Newell 型方程族联系 Bargmann 系统 (4.31) 的换位解，考虑 F_m- 流的正则系统

$$(F_m):\quad \begin{pmatrix}\psi_{t_m}\\ \phi_{t_m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_m}{\partial\psi}\\ \dfrac{\partial F_m}{\partial\phi}\end{pmatrix}=I\nabla F_m,\quad I=\begin{pmatrix}0 & I_N\\ -I_N & 0\end{pmatrix}. \tag{4.40}$$

其中 I_N 为 $N\times N$ 单位矩阵. 假设 $g_m^{t_m}$ 表示初值问题 (4.40) 的解算子，则方程 (4.40) 的解可表示为

$$\begin{pmatrix}\psi_{t_m}\\ \phi_{t_m}\end{pmatrix}=g_m^{t_m}\begin{pmatrix}\psi(0)\\ \phi(0)\end{pmatrix}$$

由于 F_k,F_l 可换，我们有 [11,135]

命题 4.4.1　(i) 任何两个正则系统 $(F_k),(F_l)$ 都是相容的.　(ii) Hamilton 相流 $g_k^{t_m}$ 和 $g_m^{t_l}$ 可换.

用 $x=t_0$ 和 $t=t_m$ 分别表示 (H) 和 (F_m) 的流变量，则 (H) 和 (F_m) 的换位解:

$$\begin{pmatrix}\psi_{x,t_m}\\ \phi_{x,t_m}\end{pmatrix}=g_0^x g_m^{t_m}\begin{pmatrix}\psi(0,0)\\ \phi(0,0)\end{pmatrix}$$

为 (x,t_m) 的光滑函数且关于流 g_0^x 和 $g_m^{t_m}$ 可换.

定理 4.4.2 假设 $(\psi(x,t_m),\phi(x,t_m))^{\mathrm{T}}$ 为系统 (H), (F_m) 的换位解，且

$$q(x,t_m)=-\frac{\langle\wedge\psi,\psi\rangle}{2(1-2\beta+i\beta\langle\psi,\phi\rangle)},\quad r(x,t_m)=\frac{\langle\wedge\phi,\phi\rangle}{2(1-2\beta+i\beta\langle\psi,\phi\rangle)}$$

则有：

(i) 方程 (H), (F_m) 被约化为高阶 Kaup-Newell 型方程 Lax 对的空间部分和时间部分

$$\begin{pmatrix}\psi_x\\ \phi_x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i\wedge^2-i\beta qr & \wedge q\\ \wedge r & i\wedge^2+i\beta qr\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi\\ \phi\end{pmatrix}. \tag{4.41}$$

$$\begin{pmatrix}\psi_{t_m}\\ \phi_{t_m}\end{pmatrix}=\sum_{j=0}^{m}c_jV_{\wedge}^{(m-j)}\begin{pmatrix}\psi\\ \phi\end{pmatrix}. \tag{4.42}$$

其中 $V_{\wedge}^{(m-j)}$ 由 (4.9) 给出，而 λ 由 $\wedge=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$ 代替.

(ii) $q(x,t_m)$ 和 $r(x,t_m)$ 满足高阶 Kundu 方程

$$(q_{t_m},r_{t_m})=X_{2m+1}+c_1X_{2m-1}+\cdots+c_mX_1. \tag{4.43}$$

证明 显然由 (4.32) 和 (4.33), 知 (4.41) 成立. 利用 (4.27), (4.32), (4.33) 和 (4.38), 经过直接而冗长的计算可得到 (4.42) 和 (4.43).

注释 4.4.3 通过引入一个谱问题，我们推导了一族广义 Kaup-Newell 方程，这族方程与重要的物理方程，如 Kudun 方程， Kaup-Newell 方程， Chen-Lee-Liu 方程， Gerjikov-Ivanov 方程， MKdV 方程， Burgers 方程和 Sharma-Tasso-Olever 方程密切联系. 同时我们具体解决了几个重要问题：如利用迹恒等式构造了方程族的 multi-Hamilton 结构，作出了 Kaup-Newell 型方程族解的对合表示，找出了 Kaup-Newell 方程， Chen-Lee-Liu 方程， Gerjikov-Ivanov 方程的一个统一刻化等. 但与 AKNS 系统或 Kaup-Newell 系统相比，这里我们提出的广义 Kaup-Newell 型方程族仍有许多有趣问题 (特别是在有限维 Hamilton 系统方面) 需进一步研究，如，将谱问题 (4.1) 非线性化为高阶约束流以及将广义 Kaup-Newell 型方程族中的每个方程分解为可换的 $x-$ 和 t_n- 有限维 Hamilton 系统 [18,19]. 有限维 Hamilton 系统的分解将导致相关孤子族的 Jacobi 反问题，从而用标准的 Jacobi 反问题技巧得到 Riemann ζ 函数解. 同时，广义 Kaup-Newell 型方程族的 r- 矩阵结构 [28] 和代数几何解 [13] 仍然没有解决.

§4.5　一个 Lax 可积方程族及其约化

考虑下列谱问题

$$\psi_x = U\psi = \begin{pmatrix} \alpha_1\lambda + u_3 & u_1 \\ \alpha_3 + u_2 & \alpha_2\lambda + u_4 \end{pmatrix}\psi \tag{4.44}$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为常数， $\alpha_1 \neq \alpha_2$, u_1, u_2, u_3, u_4 为位势函数，这种谱问题与文献 [365,366] 有关．对 $\alpha_3 = 0$, Tu 和 Meng 推导出带有两个任意函数 δ_{1n}, δ_{2n} 非线性方程族．可以证明通过适当选取 δ_{1n}, δ_{2n}, AKNS, Levi, D-AKNS 方程族都可做为该方程族的特殊约化 [365]．对 $u_2 = 0$, Ma 得到了另一方程族，证明了耦合 KdV 和 Levi 族为其特殊情况 [366]．这里我们从谱问题 (4.44) 出发，推导更一般的非线性方程族，由此获得上述文献丢失具有物理意义的一些可积系统，包括含有 Burgers 方程的 Li 方程族，含有组合 KdV-MKdV 方程的广义 AKNS 方程族，含有 Burgers 方程和 MKdV 方程的一新的方程族，并利用迹恒等式建立每个方程族的 Hamilton 结构.

(4.44) 中的矩阵 U 可改写为

$$U = (\alpha_1\lambda h_1 + \alpha_2\lambda h_2 + \alpha_3 f) + u_1 e + u_2 f + u_3 h_1 + u_4 h_2,$$

其中

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $V = ah + be + cf, h = h_1 - h_2$, 则解伴随方程

$$V_x = [U, V]$$

可得到

$$a_x = u_1 c - ub,$$

$$b_x = \alpha\lambda b + vb - 2u_1 a,$$

$$c_{nx} = -\alpha\lambda c - vc + 2ua.$$

其中 $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, $u = \alpha_3 + u_2$, $v = u_3 - u_4$.

将

$$a = \sum_{n\geq 0} a_n\lambda^{-n},\quad b = \sum_{n\geq 0} b_n\lambda^{-n},\quad c = \sum_{n\geq 0} c_n\lambda^{-n}$$

代入上述方程，有

$$\begin{aligned} a_{nx} &= u_1 c_n - u b_n, \\ b_{nx} &= \alpha b_{n+1} + v b_n - 2u_1 a_n, \\ c_{nx} &= -\alpha c_{n+1} - v c_n + 2u a_n. \end{aligned} \tag{4.45}$$

由上述递推方程，可依次解得

$$a_0 = \beta \neq 0, b_0 = c_0 = 0,$$

$$b_1 = 2\beta\alpha^{-1}u_1 1, c_1 = 2\beta\alpha^{-1}u, a_1 = 0$$

$$b_2 = 2\beta\alpha^{-2}(u_{1x} - vu_1), c_2 = -2\beta\alpha^{-2}(u_x + uv),$$
$$a_2 = -2\beta\alpha^{-2}u_1 u.$$

$$b_3 = 2\beta\alpha^{-3}(u_{1xx} - 2u_1^2 u - v_x u_1 - 2vu_{1x} + v^2 u_1),$$

$$c_3 = 2\beta\alpha^{-3}(u_{xx} - 2u_1 u^2 + v_x u + 2vu_x + v^2 u),$$

$$a_3 = 2\beta\alpha^{-3}(u_1 u_x - uu_{1x} + 2u_1 uv).$$

$$b_4 = 2\beta\alpha^{-4}(u_{1xxx} - 6uu_1u_{1x} + 6u_1^2 uv - u_1 v^3 + 3v^2 u_{1x}$$
$$+3u_1 vv_x - u_1 v_{xx} - 3v_x u_{1x} - 2vu_{1xx}),$$
$$c_4 = -2\beta\alpha^{-4}(u_{xxx} - 6u_1 uu_x - 6u_1 vu^2 + uv^3 + 3v^2 u_x$$
$$+3uvv_x + uv_{xx} + 3v_x u_x + 2vu_{xx}),$$

$$a_4 = -2\beta\alpha^{-4}(u_1 u_{1xx} + uu_{1xx} - u_{1x}u_x - 3u_1^2 u^2$$
$$+3v^2 u_1 u + 3u_1 vu_x - 3u_1 vu_{1x}).$$

引入 $\Delta(\mu) = \delta_1'(\mu)h_1 + \delta_2'(\mu)h_2$，则容易验证

$$[\mu(U(\lambda) - U(\mu))/(\lambda - \mu), V(\mu)] + \Delta_x(\mu) - [U(\lambda), \Delta(\mu)]$$
$$= (\alpha\mu b' + (\delta_1' - \delta_2')u_1]e + [u(\delta_1' - \delta_2') - \alpha\mu c']f + \delta_{1x}' h_1 + \delta_{2x}' h_2$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} f_1(\mu, u)e + f_2(\mu, u)f + f_3(\mu, u)h_1 + f_4(\mu, u)h_2.$$

由此得到下列 Lax 可积方程族

$$u_{1t} = \alpha b_{n+1} + (\delta_{1n} - \delta_{2n})u_1,$$

$$u_{2t} = -\alpha c_{n+1} - (\delta_{1n} - \delta_{2n})u,$$
$$u_{3t} = \delta_{1nx}, \tag{4.46}$$
$$u_{4t} = \delta_{2nx}.$$

可以看出该方程族含有两个任意函数 δ_{1n}, δ_{2n} 和一个任意常数 α_3. 以下证明，除了文献 [365,366] 给出的约化，方程族 (4.46) 还有其他形式的约化.

(i) 选取 $u_3 = u_4 = u_1$, $\delta_{1nx} = \delta_{2nx} = \alpha b_{n+1}$, 则谱问题 (4.44) 约化为

$$\psi_x = \begin{pmatrix} \alpha_1\lambda + u_1 & u_1 \\ \alpha_3 + u_2 & \alpha_2\lambda + u_1 \end{pmatrix} \tag{4.47}$$

并且相应的方程族 (4.46) 约化为 AKNS 方程族

$$u_{1t} = \alpha b_{n+1}, \quad u_{2t} = -\alpha c_{n+1} \tag{4.48}$$

其中的典型方程为:

对 $n = 2$

$$u_{1t} = 2\beta\alpha^{-2}[u_{1xx} - 2u_1^2(\alpha_3 + u_2)],$$
$$u_{2t} = -2\beta\alpha^{-2}[u_{2xx} - 2u_1(\alpha_3 + u_2)^2]$$

当 $\alpha_3 = 0$, $u_2 = -iu_1$ 时，我们得到 Schrödinger 方程

$$u_{1t} = 2\beta\alpha^{-2}(u_{1xx} + 2i|u_1|^2u_1).$$

对 $n = 3$

$$u_{1t} = 2\beta\alpha^{-3}[u_{1xxx} - 6u_1u_{1x}(\alpha_3 + u_2)],$$
$$u_{2t} = 2\beta\alpha^{-3}[u_{2xxx} - 6u_1u_{2x}(\alpha_3 + u_2)].$$

当 $\alpha_3 \neq 0$, $u_2 = 0$ 时，得到 KdV 方程

$$u_{1t} = 2\beta\alpha^{-3}(u_{1xxx} - 6\alpha_3u_1u_{1x}).$$

当 $u_2 = -u_1$ 时，得到组合 KdV-MKdV 方程

$$u_{1t} = 2\beta\alpha^{-3}[u_{1xxx} - 6\alpha_3u_1u_{1x} + 6u_1^2u_{1x}].$$

在规范变换

$$\psi = \phi\exp\left[\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\lambda x + \partial_x^{-1}u_1\right], \quad \lambda' = \frac{2}{\alpha}\lambda, \quad u_1 = q, \quad u_2 = r - \alpha_3$$

下，谱问题 (4.47) 等价于 AKNS 谱问题

$$\phi_x = \begin{pmatrix} \lambda' & q \\ r & -\lambda' \end{pmatrix} \phi.$$

容易证明方程族 (4.48) 在 Liouville 意义下可积，且可表示为 Hamilton 形式

$$u_t = J\frac{\delta H_n}{\delta w},$$

其中

$$w = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad H_n = \frac{\alpha a_{n+2}}{n+1}.$$

(ii) 选取 $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0$, $u_3 = r, u_4 = -r, u_1 = q + r$, $u_2 = q - r$, 则谱问题 (4.44) 约化为 Li 谱问题 [6]

$$\psi_x = \begin{pmatrix} -\lambda + r & q + r \\ q - r & \lambda - r \end{pmatrix} \psi. \tag{4.49}$$

由谱问题 (4.45), 可得

$$\begin{aligned} a_{nx} &= (q+r)c_n - (q-r)b_n, \\ b_{nx} &= -2b_{n+1} + 2rb_n - 2(q+r)a_n, \\ c_{nx} &= 2c_{n+1} - 2rc_n + 2(q-r)a_n. \end{aligned}$$

相应的方程族 (4.46) 约化为

$$\begin{aligned} (q+r)_t &= -2b_{n+1} + (\delta_{1n} - \delta_{2n})(q+r), \\ (q-r)_t &= 2c_{n+1} - (\delta_{1n} - \delta_{2n})(q-r), \\ r_t &= \delta_{1nx}, \\ -r_t &= \delta_{2nx}. \end{aligned}$$

为使这四个方程相容，需要附加条件

$$\delta_{1n} = -\delta_{2n} = \frac{1}{2}(b_n - c_n - 2a_n).$$

从而 Li 方程族为

$$\begin{aligned} q_t &= (c_{n+1} - b_{n+1}) + (b_n - c_n - 2a_n)r = \frac{1}{2}(b_n + c_n)_x, \\ r_t &= -\frac{1}{2}(c_n - b_n + 2a_n)_x. \end{aligned} \tag{4.50}$$

取 $n=2$, 有

$$q_1=\frac{1}{2}\beta(r_x-2qr)_x,$$
$$r_t=\frac{1}{2}\beta(q_x-3r^2+q^2)_x.$$

当 $q=r$ 时，约化为 Burgers 方程

$$q_t=\frac{1}{2}\beta(q_{xx}-4qq_x).$$

令 $\bar{b}_n=b_n+c_n$, $\bar{c}_n=c_n-b_n+2a_n$, 则 Li 方程族 (4.50) 可改写为

$$w_t=J(\bar{b}_n,\bar{c}_n)^{\mathrm{T}}=JL^n(0,2\beta)^{\mathrm{T}}, \tag{4.51}$$

其中

$$w=\begin{pmatrix}q\\r\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\partial & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\partial\end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\partial-q\\ \frac{1}{2}\partial+\partial^{-1}q\partial & r+\partial^{-1}r\partial\end{pmatrix}.$$

显然

$$J^*=-J,\quad JL=L^*J. \tag{4.52}$$

由于

$$\left\langle V,\frac{\partial U}{\partial\lambda}\right\rangle=-2a,\quad \left\langle V,\frac{\partial U}{\partial q}\right\rangle=b+c,\quad \left\langle V,\frac{\partial U}{\partial r}\right\rangle=c-b+2a.$$

则应用迹恒等式 [14,15], 有

$$\frac{\delta}{\delta w}(-2a)=\lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda^{\gamma}(b+c,c-b+2a)^{\mathrm{T}}\right).$$

将 a,b 和 c 的展开式代入上述方程，可得

$$\frac{\delta}{\delta u}(-2a_{n+1})=(\gamma-n)(\bar{c}_n,\bar{b}_n)^{\mathrm{T}}.$$

取 $n=0$, 则 $\gamma=0$. 从而有

$$(\bar{b}_n,\bar{c}_n)^{\mathrm{T}}=\frac{\delta H_n}{\delta w},\qquad H_n=\frac{2a_{n+1}}{n}. \tag{4.53}$$

由 (4.51) 和 (4.53), 得到方程族 (4.50) 的 Hamilton 结构

$$w_t=J\frac{\delta H_n}{\delta w}.$$

借助于 (4.52), 我们断言 Li 方程族 (4.50) 在 Liouville 意义下可积，而 $\{H_n\}$ 构成两两可换的守恒密度族.

(iii) 选取 $\alpha_3=0$, $u_3=u_1+u_2$, 则谱问题约化为

$$\psi_x=\begin{pmatrix}\alpha_1\lambda+u_1+u_2 & u_1\\ u_2 & \alpha_2\lambda+u_4\end{pmatrix}\psi, \tag{4.54}$$

由 (4.45), 得到

$$\begin{aligned}&a_{nx}=u_1c_n-u_2b_n,\\&b_{nx}=\alpha b_{n+1}+(u_1+u_2-u_4)b_n-2u_1a_n,\\&c_{nx}=-\alpha c_{n+1}-(u_1+u_2-u_4)c_n+2u_2a_n.\end{aligned} \tag{4.55}$$

相应的方程族 (4.46) 约化为

$$\begin{aligned}&u_{1t}=\alpha b_{n+1}+(\delta_{1n}-\delta_{2n})u_1,\\&u_{2t}=-\alpha c_{n+1}-(\delta_{1n}-\delta_{2n})u_2,\\&(u_1+u_2)_t=\delta_{1nx},\\&u_{4t}=\delta_{2nx}.\end{aligned} \tag{4.56}$$

为使前两个方程与第三个一致，附加条件

$$\alpha(b_{n+1}-c_{n+1})+(\delta_{1n}-\delta_{2n})(u_1-u_2)=\delta_{1x}.$$

利用 (4.15), 选取

$$\delta_{1n}=b_n+c_n+2a_n,\quad \delta_{2n}=4a_n+\frac{u_4}{u_1-u_2}(b_n-c_n).$$

方程族 (4.56) 为

$$\begin{aligned}&u_{1t}=(a_n+b_n)_x+\frac{u_4}{u_1-u_2}a_{nx},\\&u_{2t}=(a_n+c_n)_x-\frac{u_4}{u_1-u_2}a_{nx},\\&u_{4t}=4a_{nx}+\left[\frac{u_4}{u_1-u_2}(a_n+b_n)\right]_x-\left[\frac{u_4}{u_1-u_2}(a_n+c_n)\right]_x.\end{aligned} \tag{4.57}$$

其中典型方程为

对 $n=2$,

$$u_{1t}=2\beta\alpha^{-2}[u_{1x}-u_1(u_1+2u_2-u_4)]_x,$$

$$u_{2t}=-2\beta\alpha^{-2}[u_{2x}+u_2(2u_1+u_2-u_4)]_x,$$

$$u_{4t}=2\beta\alpha^{-2}\left\{u_1u_2+\frac{u_4}{u_1-u_2}\left[u_{1x}+u_{2x}-(u_1-u_2)(u_1+u_2-u_4)\right]\right\}_x.$$

该方程组可约化为 Burgers 方程

$$u_{1t}=2\beta\alpha^{-2}(u_{1xx}-2u_1u_{1x}),\quad (u_2=u_4=0),$$

$$u_{2t}=-2\beta\alpha^{-2}(u_{2xx}+2u_2u_{2x}),\quad (u_1=u_4=0).$$

对 $n=3$, 有

$$\begin{aligned}u_{1t}=&2\beta\alpha^{-3}[u_{1xx}-(3u_1+3u_2-u_4)u_{1x}+(u_1u_4)_x+u_1^3+u_1(u_2-u_4)\\&\cdot(3u_2+2u_1-u_4)]_x-\frac{2\beta\alpha^{-3}u_4}{u_1-u_2}[u_1u_{2x}-u_2u_{1x}+2u_1u_2(u_1+u_2-u_4)]_x,\\u_{2t}=&2\beta\alpha^{-3}[u_{2xx}+(3u_1+3u_2-u_4)u_{2x}-(u_2u_4)_x+u_2^3+u_2(u_1-u_4)\\&\cdot(3u_1+2u_2-u_4)]_x-\frac{2\beta\alpha^{-3}u_4}{u_1-u_2}[u_1u_{2x}-u_2u_{1x}+2u_1u_2(u_1+u_2-u_4)]_x,\\u_{4t}=&2\beta\alpha^{-3}[-2u_1u_2u_4+u_4(u_1+u_2-u_4)^2-u_4(u_1+u_2-u_4)_x]_x\\&+2\beta\alpha^{-3}\left[\frac{u_4}{u_1-u_2}(u_{1xx}-u_{2xx}-2(u_1+u_2-u_4)(u_{1x}-u_{2x}))\right]_x.\end{aligned}$$

该方程组约化为 MKdV 方程

$$u_{1t}=2\beta\alpha^{-3}(u_{1xx}+6u_1^2u_{1x}),\quad (u_2=-u_1,\quad u_4=0).$$

方程族 (4.57) 可改写为

$$w_t=J(a_n+c_n,a_n+b_n,-a_n)^{\mathrm T}=JL^n(\beta,\beta,-\beta)^{\mathrm T},\tag{4.58}$$

其中

$$w=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_4\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}0&\partial&-\dfrac{u_4}{u_1-u_2}\partial\\ \partial&0&\dfrac{u_4}{u_1-u_2}\partial\\ -\partial\dfrac{u_4}{u_1-u_2}&\partial\dfrac{u_4}{u_1-u_2}&-4\partial\end{pmatrix},$$

$$L=\begin{pmatrix}-\partial+u_4-u_2-\partial^{-1}u_1\partial & -u_2-\partial^{-1}u_2\partial & -\partial^{-1}u_4\partial-(4u_2-u_4)\\ -u_1-\partial^{-1}u_1\partial & \partial+u_4-u_1-\partial u_2\partial & -\partial^{-1}u_4\partial-(4u_1-u_4)\\ \partial^{-1}u_1\partial & \partial^{-1}u_2\partial & \partial^{-1}u_4\partial\end{pmatrix}.$$

由于

$$\left\langle V,\frac{\partial U}{\partial\lambda}\right\rangle=\alpha a,\quad \left\langle V,\frac{\partial U}{\partial u_1}\right\rangle=a+c,\quad \left\langle V,\frac{\partial U}{\partial u_2}\right\rangle=a+b,\quad \left\langle V,\frac{\partial U}{\partial u_4}\right\rangle=-a.$$

应用迹恒等式，得到

$$\frac{\delta}{\delta w}(\alpha a)=\lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda^{\gamma}(a+c,a+b,-a)^{\mathrm{T}}\right).$$

将 a,b 和 c 的展开式代入上述方程，得到

$$\frac{\delta}{\delta u}(\alpha a_{n+1})=(\gamma-n)(a_n+c_n,a_n+b_n,-a_n)^{\mathrm{T}}.$$

取 $n=0$, 则 $\gamma=0$. 从而有

$$(a_n+c_n,a_n+b_n,-a_n)^{\mathrm{T}}=\frac{\delta H_n}{\delta w},\quad H_n=-\frac{\alpha a_{n+1}}{n}. \tag{4.59}$$

(4.58) 与 (4.59) 结合，得到方程族 (4.57) 的 Hamilton 结构为

$$w_t=J\frac{\delta H_n}{\delta w}.$$

直接计算，得到

$$\begin{aligned}\{H(\lambda),H(\mu)\}&=\left\langle V(\lambda),\frac{\mu}{\mu-\lambda}V(\mu)+\Delta(\mu)\right\rangle x\\&=\alpha\mu(b'c-bc')+\left[a(b'+c'-2a'-\frac{u_4}{u_1-u_2}(b'-c'))\right]_x,\end{aligned}$$

这说明方程族 (4.57) 在 Liouville 意义下可积，且 $\{H_n\}$ 构成两两可换的守恒密度族.

第5章　Darboux 变换及其应用

在这一章，我们研究 Darboux 变换，以及在构造非线性方程精确解中的应用，主要结果如下：Kudun 系统的 N 次 Darboux 变换，Darboux 变换约化和精确解；色散长水波方程的 Darboux 变换和类孤子解；KPI 方程的 Daboux 变换和显式 N- 孤子解；q-KdV 方程族的 Daboux 变换和类孤子解.

§5.1　Kudun 方程的显式 N 次 Darboux 变换及其约化

在这一节，我们将构造耦合 Kundu 方程 (4.20) 的 N 次 Darboux 变换，Darboux 变换实际上是关于 Lax 对 (4.1) 和 (4.23) 的一种特殊的规范变换

$$\tilde{y} = Ty. \tag{5.1}$$

要求 $\tilde{y}$ 也满足同样形式的 Lax 对 (4.1) 和 (4.23), 即

$$\tilde{y}_x = \tilde{U}\tilde{y}, \quad \tilde{U} = (T_x + TU)T^{-1}, \tag{5.2}$$

$$\tilde{y}_t = \tilde{V}^{(1)}\tilde{y}, \quad \tilde{V}^{(1)} = (T_t + TV^{(1)})T^{-1}. \tag{5.3}$$

通过交叉微分 (5.2) 和 (5.3), 我们得到

$$\tilde{U}_t - \tilde{V}^{(1)}_x + [\tilde{U}, \tilde{V}^{(1)}] = T(U_t - V^{(1)}_x + [U, V^{(1)}])T^{-1}, \tag{5.4}$$

这表明要使得方程 (4.20) 在规范变换 (5.1) 下不变，我们要求 $\tilde{U}$ 和 $\tilde{V}^{(1)}$ 与 U 和 $V^{(1)}$ 有相同的形式，同时 U, $V^{(1)}$ 中旧的位势 q, r 被映为 $\tilde{U}$, $\tilde{V}^{(1)}$ 中新的位势 $\tilde{q}$, $\tilde{r}$, 通常这种过程可不断的进行下去并产生一系列多孤子解.

§5.1.1　耦合 Kundu 方程的显式 N 次 Darboux 变换

按照文献 [1,97] 的技巧，我们可直接构造耦合 Kundu 方程 (4.20) 的 $N-$ 次 Darboux 变换如下：

假设 $(\phi_1(x,t,\lambda), \phi_2(x,t,\lambda))^{\mathrm{T}}$ 和 $(\psi_1(x,t,\lambda), \psi_2(x,t,\lambda))^{\mathrm{T}}$ 为谱问题 (4.1) 和 (4.23) 的两个基本解，并由此定义关于 A_k, B_k, C_k 和 D_k ($0 \le k \le N-1$) 的两个代数方程组

$$\sum_{k=0}^{N-1}(A_k + \alpha_j\lambda_j B_k)\lambda_j^{2k} = -\lambda_j^{2N}, \quad 1 \le j \le 2N, \tag{5.5}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}(\lambda_j C_k+\alpha_j D_k)\lambda_j^{2k}=-\alpha_j\lambda_j^{2N},\quad 1\le j\le 2N, \tag{5.6}$$

而

$$\alpha_j=\frac{\phi_2(\lambda_j)-\gamma_j\psi_2(\lambda_j)}{\phi_1(\lambda_j)-\gamma_j\psi_1(\lambda_j)},\quad 1\le j\le 2N, \tag{5.7}$$

其中 λ_j 和 γ_j 为适当选取的参数，使得方程组 (5.5) 和 (5.6) 的系数行列式不为零，因此 A_k, B_k, C_k 和 D_k 可由 (5.5) 和 (5.6) 惟一确定. 令

$$T=\begin{pmatrix}A(\lambda) & B(\lambda)\\ C(\lambda) & D(\lambda)\end{pmatrix}=Q\left(I\lambda^{2N}+\sum_{k=0}^{N-1}(Q_{2k}+\lambda Q_{2k+1})\lambda^{2k}\right), \tag{5.8}$$

这是关于 λ 的 $2N$ 阶矩阵系数的多项式，其中

$$Q=\begin{pmatrix}\delta_N & 0\\ 0 & 1/\delta_N\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$Q_{2k}=\begin{pmatrix}A_k & 0\\ 0 & D_k\end{pmatrix},\quad Q_{2k+1}=\begin{pmatrix}0 & B_k\\ C_k & 0\end{pmatrix}\quad 0\le k\le N-1.$$

而 $\delta_N=\delta_N(x,t)$ 为待定函数，将在构造方程 (4.20) 的 Darboux 变换中起重要作用. 当 $\delta_N=1$ 或 $Q=I$ 时， (5.8) 形式的矩阵 T 恰为文献 [98] 中的 T, 那里我们构造了 Gerjikov-Ivanov 方程 (5.4) 的 Darboux 变换. 由 (5.5), (5.6) 和 (5.8), 易见 $\det T(\lambda)$ 为 λ 的 $4N$ 阶多项式，其根为 $\pm\lambda_j$ $(1\le j\le 2N)$. 因此我们有

$$\det T(\lambda)=\prod_{j=1}^{2N}(\lambda^2-\lambda_j^2). \tag{5.9}$$

命题 5.1.1 假设 δ_N 满足一阶常微分方程

$$\partial_x\ln\delta_N=(2\beta-1)(rB_{N-1}-qC_{N-1}-2iB_{N-1}C_{N-1}). \tag{5.10}$$

则由 (5.1) 决定的矩阵 $\tilde{U}$ 与 U 具有相同的形式，即

$$\tilde{U}=\begin{pmatrix}-i\lambda^2-i\beta\tilde{q}\tilde{r} & \lambda\tilde{q}\\ \lambda\tilde{r} & i\lambda^2+i\beta\tilde{q}\tilde{r}\end{pmatrix},$$

其中 q, r 以及 $\tilde{q}, \tilde{r}$ 之间的变换由下式给出

$$\tilde{q}=\delta_N^2(q+2iB_{N-1}),\quad \tilde{r}=\delta_N^{-2}(r-2iC_{N-1}). \tag{5.11}$$

变换 (5.1) 和 (5.11) : $(\psi,q,r)\to(\tilde{\psi},\tilde{q},\tilde{r})$ 称谱问题 (5.1) 的 Darboux 变换.

证明　令 $T^{-1}=T^*/\det T$ 及

$$(T_x+TU)T^*=\begin{pmatrix}f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda)\\ f_{21}(\lambda) & f_{22}(\lambda)\end{pmatrix},\tag{5.12}$$

容易看出 $f_{11}(\lambda)$ 和 $f_{22}(\lambda)$ 为 λ 的 $4N+2$ 次多项式，$f_{12}(\lambda)$ 和 $f_{21}(\lambda)$ 为 λ 的 $4N+1$ 次多项式.

另一方面，利用 (5.1), (5.5)~(5.7), 我们发现

$$\alpha_{jx}=\lambda_j r-\lambda_j q\alpha_j^2+2i(\lambda_j^2+\beta qr)\alpha_j,$$

$$A(\pm\lambda_j)=\mp\alpha_j B(\pm\lambda_j),\quad C(\pm\lambda_j)=\mp\alpha_j D(\pm\lambda_j),$$

由上面各式, 可以验证 $\pm\lambda_j$ $(1\le j\le 2N)$ 为 $f_{kj}(\lambda)$ $(k,j=1,2)$ 的根, 结合 (5.9) 知道 $f_{kj}(\lambda)$ 能被 $\det T$ 整除, 因此 $(T_x+TU)T^{-1}$ 是 λ 的二阶矩阵系数的多项式, 即

$$T_x+TU=(\tilde U_2\lambda^2+\tilde U_1\lambda+\tilde U_0)T.\tag{5.13}$$

其中矩阵 $\tilde U_2(x,t)$, $\tilde U_1(x,t)$ 和 $\tilde U_0(x,t)$ 不依赖于 λ.

记 $U=U_2\lambda^2+U_1\lambda+U_0$, 其中

$$U_2=\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix},\quad U_1=\begin{pmatrix}0 & q\\ r & 0\end{pmatrix},\quad U_0=\begin{pmatrix}-i\beta qr & 0\\ 0 & i\beta qr\end{pmatrix}.$$

比较 (6.13) 中 λ^{2N+2}, λ^{2N+1} 和 λ^N 的系数得到

$(2N+2)$th coeff.: $\tilde U_2=QU_2Q^{-1}=U_2$.

$(2N+1)$th coeff.: $\tilde U_1=(QU_1+[QQ_{2N-1},U_2])Q^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \tilde q\\ \tilde r & 0\end{pmatrix}$.

$(2N)$th coeff.:

$$\begin{aligned}\tilde U_0&=\partial_x lnQ+(QU_0+QQ_{2N-1}U_1-\tilde U_1QQ_{2N-1}+[QQ_{2N-2},U_2])Q^{-1}\\&=\begin{pmatrix}-i\beta\tilde q\tilde r & 0\\ 0 & i\beta\tilde q\tilde r\end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中 $\tilde q$ 和 $\tilde r$ 由 (5.11) 给出.

下面我们证明 (6.3) 中的 $\tilde V^{(1)}$ 在变换 (5.1) 和 (5.11) 下与 $V^{(1)}$ 相同的形式.

命题 5.1.2 假设 δ_N 满足相容的一阶常微分方程

$$\begin{aligned}\partial_t \ln\delta_N =&(2\beta-1)[i(qC_{N-1x}+rB_{N-1x})-i(q_xC_{N-1}+r_xB_{N-1})\\&-2(B_{N-1}C_{N-1x}-B_{N-1x}C_{N-1})\\&-(4\beta-1)qr(rB_{N-1}-qC_{N-1})-i(r^2B_{N-1}^2+q^2C_{N-1}^2)\\&-4(rB_{N-1}^2C_{N-1}-qB_{N-1}C_{N-1}^2)+8i\beta qrB_{N-1}C_{N-1}\\&+4iB_{N-1}^2C_{N-1}^2].\end{aligned}\tag{5.14}$$

则在变换 (5.1) 和 (5.11) 下，(5.3) 中的矩阵 $\tilde{V}^{(1)}$ 与 $V^{(1)}$ 具有相同的形式.

证明 利用类似与命题 5.1.1 的方法，可以证明 $(T_t+TV^{(1)})T^{-1}$ 为 λ 四阶矩阵系数的多项式，即

$$T_t+TV^{(1)}=(\tilde{V}_4\lambda^4+\tilde{V}_3\lambda^3+\tilde{V}_2\lambda^2+\tilde{V}_1\lambda+\tilde{V}_0)T.\tag{5.15}$$

将 $V^{(1)}$ 写为形式：$V^{(1)}=V_4\lambda^4+V_3\lambda^3+V_2\lambda^2+V_1\lambda+V_0$, 其中

$$V_4=\begin{pmatrix}-2i&0\\0&2i\end{pmatrix},\quad V_3=\begin{pmatrix}0&2q\\2r&0\end{pmatrix},\quad V_2=\begin{pmatrix}-iqr&0\\0&iqr\end{pmatrix},$$

$$V_1=\begin{pmatrix}0&iq_x-(2\beta-1)q^2r\\-ir_x-(2\beta-1)qr^2&0\end{pmatrix},$$

$$V_0=\begin{pmatrix}\beta(rq_x-qr_x)+\frac{1}{2}i\beta(8\beta-3)q^2r^2&0\\0&-\beta(rq_x-qr_x)-\frac{1}{2}i\beta(8\beta-3)q^2r^2\end{pmatrix}.$$

比较 λ^{2N+j} $(j=0,1,2,3,4)$ 的系数得到

$(2N+4)$th coeff.: $\tilde{V}_4=QV_4Q^{-1}=V_4$.

$(2N+3)$th coeff.: $\tilde{V}_3=(QV_3+[QQ_{2N-1},V_4])Q^{-1}=\begin{pmatrix}0&2\tilde{q}\\2\tilde{r}&0\end{pmatrix}$.

$(2N+2)$th coeff.:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_2&=(QV_2+QQ_{2N-1}V_3-\tilde{V}_3QQ_{2N-1}+[QQ_{2N-2},V_4])Q^{-1}\\&=\begin{pmatrix}-i\tilde{q}\tilde{r}&0\\0&i\tilde{q}\tilde{r}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$(2N+1)$th coeff.:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_1=&(QV_1+QQ_{2N-1}V_2-\tilde{V}_2QQ_{2N-1})Q^{-1}\\&+\left(QQ_{2N-2}V_3-\tilde{V}_3QQ_{2N-2}+[QQ_{2N-3},V_4]\right)Q^{-1},\end{aligned}\tag{5.16}$$

$(2N)$th coeff.:

$$
\begin{aligned}
\tilde{V}_0 &= \partial_t \ln Q + (QV_0 + QQ_{2N-1}V_1 - \tilde{V}_1 QQ_{2N-1} + QQ_{2N-2}V_2 \\
&\quad - \tilde{V}_2 QQ_{2N-2} + QQ_{2N-3}V_3 - \tilde{V}_3 QQ_{2N-3} + [QQ_{2N-4}, V_4])Q^{-1} \\
&= \partial_t \delta_N + (QV_0 + QQ_{2N-1}V_1 - \tilde{V}_1 QQ_{2N-1})Q^{-1} \\
&\quad + \frac{1}{2}U_2\tilde{U}_1([QQ_{2N-3}, V_4] + QQ_{2N-2}V_3 - \tilde{V}_3 QQ_{2N-2})Q^{-1} \\
&\quad - \frac{1}{2}([QQ_{2N-3}, V_4] + Q_{2N-2}V_3 - \tilde{V}_3 Q_{2N-2})U_2U_1Q^{-1}.
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

再比较 (5.13) 中 λ^{2N-1} 的系数并注意到

$$
V_4 = 2U_2, V_3 = 2U_1, \tilde{V}_3 = 2\tilde{U}_1, U_0 = \beta V_2, \tilde{U}_0 = \beta \tilde{V}_2.
$$

我们发现

$$
\begin{aligned}
&[QQ_{2N-3}, V_4] + QQ_{2N-2}V_3 - \tilde{V}_3 QQ_{2N-2} \\
&= -2Q_x Q_{2N-1} - 2QQ_{2N-1x} + 2\tilde{U}_0 QQ_{2N-1} - 2QQ_{2N-1}U_0.
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

将 (5.18) 代入 (5.16) 和 (5.17), 直接计算, 知道 $\tilde{V}_1$ 和 $\tilde{V}_0$ 具有与 V_1 和 V_0 同样的形式. 利用 (5.10), (5.11), (5.14) 并注意到 $q, r, \tilde{q}, \tilde{r}$ 满足 Kundu 方程 (4.20), 利用 Mathematica 可以证明 $\delta_{Nxt} = \delta_{Ntx}$, 即方程 (5.10) 和 (5.11) 是相容的.

命题 5.1.1 和 5.1.2 表明, 变换 (5.1),(5.11) 将 Lax 对 (4.1) 和 (4.23) 变为相同形式的 Lax 对 (5.2), (5.3). 因此两种 Lax 对给出相同的耦合 Kundu 方程 (4.20). 我们称变换 $(\psi, q, r) \to (\tilde{\psi}, \tilde{q}, \tilde{r})$ 为耦合 Kundu 方程 (4.20) 的 Darboux 变换. 总之, 我们有

定理 5.1.3 *在 Darboux 变换 (5.1) 和 (5.11) 下, 耦合 Kundu 方程 (4.20) 的解 (q, r) 变为新的解 $(\tilde{q}, \tilde{r})$, 其中 B_{N-1} 和 C_{N-1} 由 (5.15) 和 (5.16) 给出, 而 δ_N 由常微分方程 (5.10) 和 (5.14) 给出.*

§5.1.2 Darboux 变换的约化和应用

这里, 我们利用约化技巧将耦合 Kundu 方程 (4.20) 的 N 次 Darboux 变换约化为 Kundu 方程 (4.21) 的 Darboux 变换, 为此, 我们令 $r = -q^*$, 并选取 Lax 对 (4.1) 和 (4.23) 的解为

$$
\phi(\lambda) = (\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda))^{\mathrm{T}}, \quad \psi(\lambda) = (-\phi_2^*(\lambda^*), \phi_1^*(\lambda^*))^{\mathrm{T}},
$$

其中参数

$$\lambda_{2j}=\lambda_{2j-1}^{*},\quad \gamma_{2j}=-\gamma_{2j-1}^{*^{-1}},\quad 1\leq j\leq N.$$

于是，可以证明

$$\alpha_{2j}^{-1}=-\alpha_{2j-1}^{*}, D_k^{*}=A_k, C_k^{*}=-B_k, (0\leq k\leq N-1).$$

相应的系统 (5.5)~(5.6) 可约化为

$$\sum_{k=0}^{N-1}(A_k+\lambda_{2j-1}\alpha_{2j-1}B_k)\lambda_{2j-1}^{2k}=-\lambda_{2j-1}^{2N}, \tag{5.19}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}(\alpha_{2j-1}^{*}A_k-\lambda_{2j-1}^{*}B_k)\lambda_{2j-1}^{*^{2k}}=-\alpha_{2j-1}^{*}\lambda_{2j-1}^{*^{2N}},\quad 1\leq j\leq N, \tag{5.20}$$

$$\alpha_{2j-1}=\frac{\phi_2(\lambda_{2j-1})-\gamma_{2j-1}\psi_2(\lambda_{2j-1})}{\phi_1(\lambda_{2j-1})-\gamma_{2j-1}\psi_1(\lambda_{2j-1})}. \tag{5.21}$$

并且方程 (5.10) 和 (5.14) 变为

$$\partial_x\delta_N=2(2\beta-1)\left[\mathrm{Im}(q^{*}B_{N-1})+i|B_{N-1}|^2\right], \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}\partial_t\delta_N=2(2\beta-1)&\left[-iRe(q^{*}B_{N-1x}-q_x^{*}B_{N-1})-2\mathrm{Im}(B_{N-1}^{*}B_{N-1x})\right.\\&+(4\beta-1)|q|^2\mathrm{Im}(q^{*}B_{N-1})-iRe(q^{*^2}B_{N-1}^2)-4\mathrm{Im}(q^{*}|B_{N-1}|^2B_{N-1})\\&\left.+4i\beta|q|^2|B_{N-1}|^2+2i|B_{N-1}|^4\right].\end{aligned} \tag{5.23}$$

基于这些结果，我们有如下定理

定理 5.1.4 假设 δ_N 满足常微分方程 (5.22) 和 (5.23)，且 A_k，B_k 由线性代数方程 (5.19) 和 (5.20) 确定，则在 Darboux 变换

$$\tilde{q}=\delta_N^2(q+2iB_{N-1}) \tag{5.24}$$

下， Kundu 方程 (5.21) 的解 q 变为新的解 $\tilde{q}$.

注释 5.1.5 这里提出的 N 次 Darboux 变换 (5.24) 有一些特点：首先，(5.24) 的解 $\tilde{q}$ 是解 q 的 N 次 Darboux 变换，可以解释为初始解 q 的非线性叠加和 N 孤子解，它以统一方式包括了 Kundu 方程的所有 N 孤子解，从而给出了 Kaup-Newell 方程， Chen-Lee-Liu 方程和 Gerjikov-Ivanov 方程的统一而显式的 N 孤子解．其次， Kudun 方程解被约化为求解一线性代数方程组和两个一阶常微分方程，这样很容易在计算机上利用符号运算产生多孤子解．最后，对情况 $\beta=1/2$，这里的所有结果化为文献 [98] 的相应结果．

下面，我们应用 Darboux 变换 (5.24) 构造 Kundu 方程 (5.21) 的显式解. 通常我们从方程 (5.21) 的特殊解出发，做 Darboux 变换，将 $q=0$ $(q=r=0)$ 代入 Lax 对 (4.1) 和 (4.23), 我们发现两个基本解可选为

$$\phi(\lambda)=\begin{pmatrix}\exp(-i\lambda^2x-2i\lambda^4t)\\0\end{pmatrix},\quad \psi(\lambda)=\begin{pmatrix}0\\\exp(i\lambda^2x+2i\lambda^4t)\end{pmatrix}.$$

根据 (5.21), 我们有

$$\alpha_{2j-1}=-\exp(2i\lambda_{2j-1}^2x+4i\lambda_{2j-1}^4t+\delta_j+i\mu_j),\quad 1\le j\le N,$$

其中 $\gamma_{2j-1}=\exp(\delta_j+i\mu_j)$. 这里我们仅讨论情况 $N=1$ 和 $N=2$.

(I) 对 $N=1$, 令 $\lambda_1=\xi_1+i\eta_1$ $(\xi_1\neq\eta_1)$. 则解线性代数方程 (5.19) 和 (5.20) 给出

$$B_0=\frac{2i\xi_1\eta_1\exp(iY_1)}{\xi_1\cos h(X_1)+i\eta_1\sin h(X_1)},\tag{5.25}$$

其中

$$X_1=4\xi_1\eta_1x+16\xi_1\eta_1(\xi_1^2-\eta_1^2)t+\delta_1,$$

$$Y_1=-2(\xi_1^2-\eta_1^2)x+4(\xi_1^4-\eta_1^4-6\xi_1^2\eta_1^2)t+\mu_1,$$

利用 (5.25) 和 Mathematica, 解方程 (5.22) 和 (5.23)$(q=r=0)$, 得到

$$\delta_1=\exp\left\{2(2\beta-1)\left[if(x,t)+(\xi_1^2+\eta_1^2)(\xi_1^2-\eta_1^2)^{-1}g(x,t)\right]\right\}.$$

其中

$$g(x,t)=\arctan\left[\xi_1^{-1}\eta_1\tan h(X_1)\right],$$

$$f(x,t)=-g(x,t)+\frac{\xi_1\eta_1(\xi_1^2+\eta_1^2)\sin h(2X_1)}{(\xi_1^2-\eta_1^2)^2+(\xi_1^4-\eta_1^4)\cos h(2X_1)}.$$

这样利用 Darboux 变换 (5.24), 便可得到 Kundu 方程 (4.21) 的解

$$\tilde{q}=2i\delta_1^2B_0,\tag{5.26}$$

这种解的性质由图 5.1.1 给出.

(II) 对 $N=2$, 令 $\lambda_1=\xi_1+i\eta_1$, $\lambda_3=\xi_2+i\eta_2$ $(\xi_1\neq\xi_2)$. 则我们由 (5.21) 得到

$$\alpha_1=-\exp(X_1+iY_1),\quad \alpha_3=-\exp(X_2+iY_2),$$

其中

$$X_2=-4\xi_2\eta_2x-16\xi_2\eta_2(\xi_2^2-\eta_2^2)t+\delta_2,$$

$$Y_2=2(\xi_2^2-\eta_2^2)x+4(\xi_2^4+\eta_2^4-6\xi_2^2\eta_2^2)t+\mu_2.$$

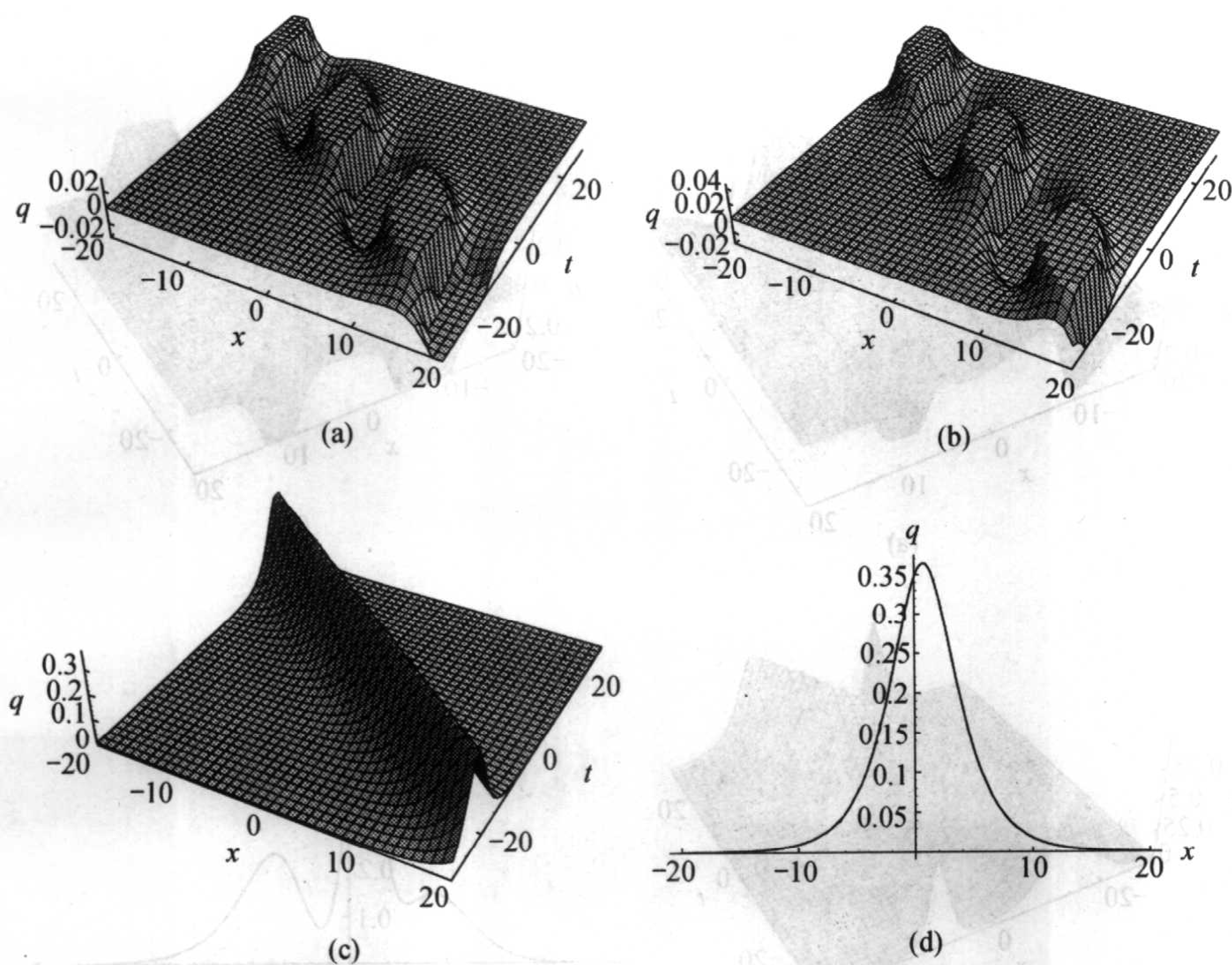


图 5.1.1 单孤子解 (5.26), 其中选取参数

$\xi_1 = 0.5, \eta_1 = 0.2, \delta_1 = 0.3, \mu_1 = 0.6, \beta = 0.5.$

(a) q 的实部, (b) q 的虚部, (c) q 的模, (d) q 在 $t = 0$

解线性代数方程组 (5.19) 和 (5.20) 给出

$$B_1 = \frac{\Delta_{B_1}}{\Delta},$$

其中 Δ 表示代数方程组 (5.19) 和 (5.20) 的系数矩阵, 而 Δ_{B_1} 将 Δ 的第 4 列用向量 $(-\lambda_1^4, -\lambda_3^4, -\alpha_1^*\lambda_1^{*^4}, -\alpha_3^*\lambda_3^{*^4})^{\mathrm{T}}$ 得到, 即

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1\alpha_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3\alpha_1 \\ 1 & \lambda_3\alpha_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3\alpha_3 \\ \alpha_1^* & -\lambda_1^* & \lambda_1^{*^2}\alpha_1^* & -\lambda_1^{*^3} \\ \alpha_3^* & -\lambda_3^* & \lambda_3^{*^2}\alpha_3^* & -\lambda_3^{*^3} \end{vmatrix}, \quad \Delta_B = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1\alpha_1 & \lambda_1^2 & -\lambda_1^4 \\ 1 & \lambda_3\alpha_3 & \lambda_3^2 & -\lambda_3^4 \\ \alpha_1^* & -\lambda_1^* & \lambda_1^{*^2}\alpha_1^* & -\lambda_1^{*^4}\alpha_1^* \\ \alpha_3^* & -\lambda_3^* & \lambda_3^{*^2}\alpha_3^* & -\lambda_3^{*^4}\alpha_3^* \end{vmatrix}.$$

在这种情况, 方程 (5.22) 和 (5.23) 的求解较麻烦, 为简单起见, 我们仅讨论特殊情况 $\beta = 1/2$, 则 $\delta_2 = 1$, 因此, 利用 Darboux 变换 (5.24) 可得到 Gerjikov-Ivanov 方程 (4.6) 的双孤子解为

$$\tilde{q} = 2iB_1, \tag{5.27}$$

这个解的性质在图 5.1.2 中给出.

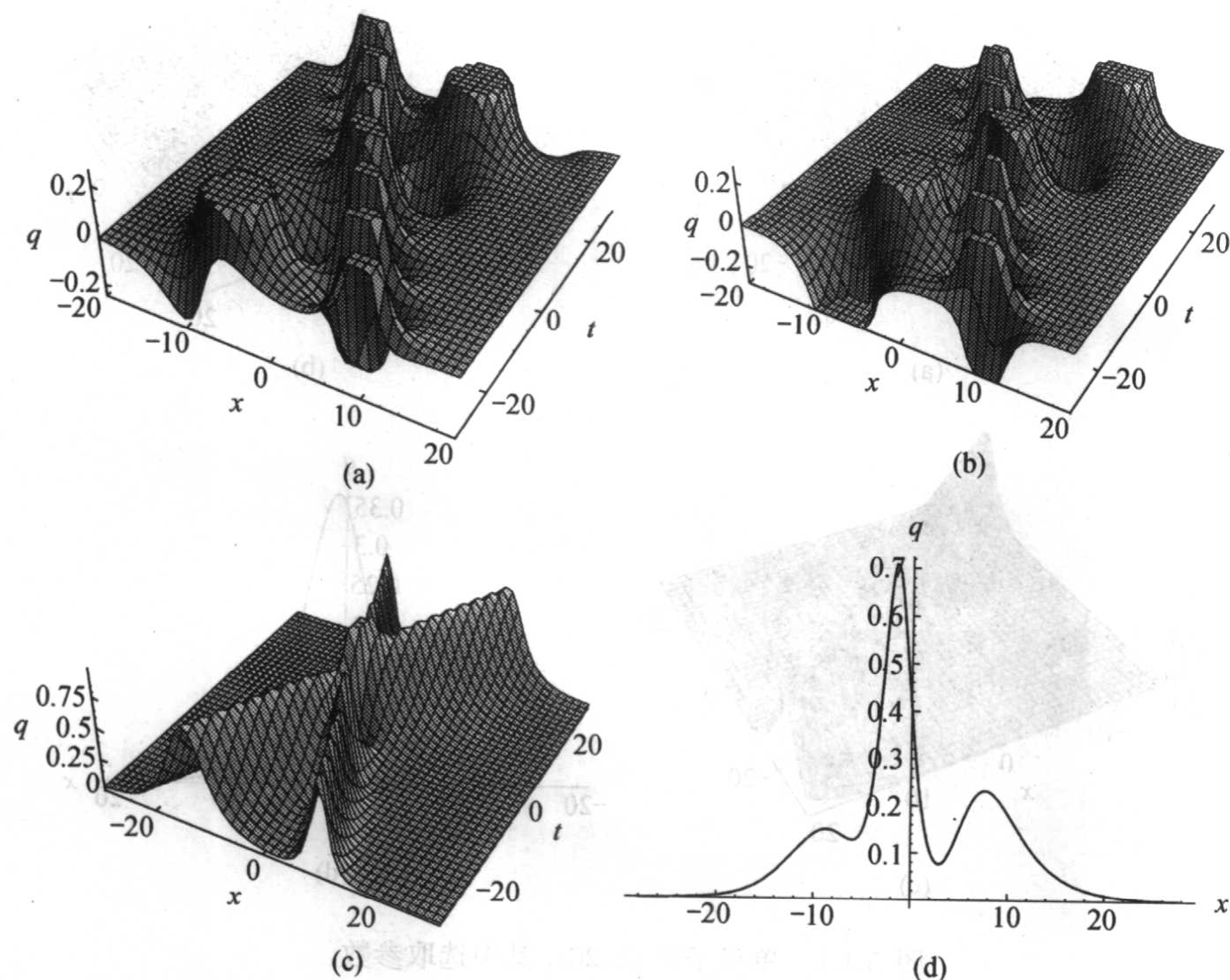


图 5.1.2 双孤子解 (5.27), 其中选取参数
$\xi_1 = 0.5, \xi_2 = 0.3.\eta_1 = 0.2, \delta_1 = 0.3, \delta_2 = -0.1,$
$\mu_1 = 0.6, \mu_2 = -0.2, \beta = 0.5$. (a) q 的实部, (b) q 的虚部, (c) q 的模, (d) q 在 $t = 0$

§5.2 色散长水波方程族的 Darboux 变换和类孤子解

色散长水波方程

$$\left.\begin{aligned} &u_t - 2uu_x - 2v_x + u_{xx} = 0, \\ &v_t - 2(uv)_x - v_{xx} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

主要来源于浅水中的色散波模型, 首先由 Whitham 和 Broer 提出 [136,137]. 方程的对称, 守恒律, 相似约化, Painlevé 性质和孤子解已被详细的研究 [138~140]. 近年来, 联系色散长水波方程的谱问题及相应的方程族 (5.28) 也被提出和研究 [11,141,142]. 研究表明方程族在 Liouville 意义下可积并具有 Hamilton 结构 [142], 在位势函数和特征函数的两种不同的约束下, 谱问题被线性化为两类有

限维完全可积系统 [11]. 在这一节, 我们构造色散长水波方程族的 Darboux 变换和类孤子解.

§5.2.1 色散长水波方程族及其 Darboux 变换

我们假设 $|x| \to \infty$ 时, u, v 和它们的导数都快速趋于零. 用 ∂ 表示 $\dfrac{\partial}{\partial x}$, ∂^{-1} 表示 ∂ 的逆. $\partial\partial^{-1} = \partial^{-1}\partial = 1$. 我们首先利用零曲率方程推导色散长水波方程族, 考虑谱问题 [11,142]

$$y_x = Uy = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda - u) & -v \\ 1 & -\frac{1}{2}(\lambda - u) \end{pmatrix} y. \tag{5.29}$$

解自伴方程 $V_x = [U, V]$, 其中

$$V = \sum_{k \geq 0} V_k \lambda^{-k} = \sum_{k \geq 0} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & -a_k \end{pmatrix} \lambda^{-k}$$

可得到

$$\begin{aligned} &a_0 = \alpha = \text{constant} \neq 0, \quad b_0 = c_0 = 0, \\ &b_{k+1} = b_{kx} + ub_k - 2va_k, \quad c_{k+1} = -c_{kx} + uc_k + 2a_k, \\ &a_{k+1x} = -b_{k+1} - vc_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{5.30}$$

取

$$V^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} V_k \lambda^{n-k} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c_{n+1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}c_{n+1} \end{pmatrix},$$

并令

$$y_t = V^{(n)} y, \tag{5.31}$$

则 (5.29) 和 (5.31) 之间的相容条件给出零曲率方程

$$U_t - V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] = 0.$$

其等价于

$$u_t = c_{n+1x}, \quad v_t = a_{n+1x}. \tag{5.32}$$

由方程 (5.30), 我们看到积分算子 ∂^{-1} 仅出现在 a_k. 在 a_k, b_k 和 c_k $(k = 1, 2, \cdots)$

计算过程，我们取 ∂^{-1} 积分常数为零，由 (5.30) 得到的前几个为

$$a_1 = 0,\quad b_1 = -2\alpha v,\quad c_1 = 2\alpha,\quad a_2 = 2\alpha v,$$

$$b_2 = -2\alpha(v_x + uv),\quad c_2 = 2\alpha u,\quad a_3 = 2\alpha(v_x + 2uv),$$

$$b_3' = -2\alpha[(v_x + uv)_x + u(v_x + uv) + 2v^2],\quad c_3 = 2\alpha(-u_x + 2v + u^2).$$

方程 (5.28)　$n = 2,\ \alpha = \dfrac{1}{2}\Big)$ 恰为方程族 (5.32) 的一员. 下面我们构造方程族 (5.32) 的 Darboux 变换，考虑 Lax 对 (5.29) 和 (5.31) 的规范变换

$$\tilde{y} = Ty \tag{5.33}$$

要求 $\tilde{y}$ 也满足同样形式的 Lax 对 (5.29) 和 (5.31) $\tilde{U}$ 和 $\tilde{V}^{(n)}$, 即

$$\tilde{y}_x = \tilde{U}\tilde{y},\qquad \tilde{U} = (T_x + TU)T^{-1}, \tag{5.34}$$

$$\tilde{y}_t = \tilde{V}^{(n)}\tilde{y},\qquad \tilde{V}^{(n)} = (T_t + TV^{(n)})T^{-1}. \tag{5.35}$$

用 §5.1 同样的方法，我们可直接构造方程族 (5.32) 的 N 次 Darboux 变换如下：

假设

$$y = \begin{pmatrix} \phi_1(x,t,\lambda) & \psi_1(x,t,\lambda) \\ \phi_2(x,t,\lambda) & \psi_2(x,t,\lambda) \end{pmatrix}$$

为谱问题 (5.29) 和 (5.31) 的基本解，并用之定义两个关于 A_k, B_k, C_k 和 D_k $(0 \le k \le N-1)$ 的代数方程组

$$\sum_{k=0}^{N-1}(A_k + \alpha_j B_k)\lambda_j^k = -\lambda_j^N,\quad 1 \le j \le 2N, \tag{5.36}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}(C_k + \alpha_j D_k)\lambda_j^k = -\alpha_j\lambda_j^N,\quad 1 \le j \le 2N, \tag{5.37}$$

而

$$\alpha_j = \frac{\phi_2(\lambda_j) - \gamma_j\psi_2(\lambda_j)}{\phi_1(\lambda_j) - \gamma_j\psi_1(\lambda_j)},\quad 1 \le j \le 2N, \tag{5.38}$$

其中 λ_j 和 γ_j 为适当选取的参数，使得 (5.36) 和 (5.37) 的系数行列式非零，从而 A_k, B_k, C_k 和 D_k 可被 (5.36) 和 (5.37) 惟一确定.

令

$$T = Q\sum_{k=0}^{N} Q_k\lambda^k, \tag{5.39}$$

则 T 为 λ 的 N 阶矩阵系数的多项式，其中

$$Q=\begin{pmatrix}\delta_N & 0\\ 0 & 1/\delta_N\end{pmatrix},\quad Q_k=\begin{pmatrix}A_k & B_k\\ C_k & D_k\end{pmatrix},\quad Q_N=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad 0\le k\le N-1,$$

这里 $\delta_N=\delta_N(x,t)$ 为待定函数，在构造方程族 (5.32) 的 Darboux 变换中起着重要作用， δ_N 的另一作用是保持 U 中常数 1 在规范变换下不变. 一般来说，保持含有常数的 Lax 对在规范变换下不变是很困难的事，通常只有特殊的规范变换才行 [2,92]. 当 $\delta_N=1$ 或 $Q=I$, (5.39) 中的矩阵 T 恰与文献 [97,98] 的矩阵形式一致，但在这种情况下只能得到色散长水波方程族的平凡 Darboux 变换，这是与 AKNS 系统的最大区别 [91].

由 (5.36), (5.37) 和 (5.39), 容易看出 $\det T(\lambda)$ 为 λ 的 $2N$ 阶多项式，而 $\lambda_j(1\le j\le 2N)$ 为其所有根. 因此，我们有

$$\det T(\lambda)=\prod_{j=1}^{2N}(\lambda-\lambda_j). \tag{5.40}$$

基于以上事实，我们可以证明如下命题

命题 5.2.1 假设 $\delta_N^2=1+C_{N-1}$, 则由 (5.34) 确定的矩阵 $\tilde U$ 与 U 具有相同的形式，即

$$\tilde U=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\lambda-\tilde u) & -\tilde v\\ 1 & -\frac{1}{2}(\lambda-\tilde u)\end{pmatrix},$$

其中

$$\tilde u=u-\frac{C_{N-1x}}{1+C_{N-1}},\quad \tilde v=(1+C_{N-1})(v+B_{N-1}). \tag{5.41}$$

证明 令 $T^{-1}=T^*/\det T$,

$$(T_x+TU)T^*=\begin{pmatrix}f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda)\\ f_{21}(\lambda) & f_{22}(\lambda)\end{pmatrix}.$$

易见， $f_{11}(\lambda)$ 和 $f_{22}(\lambda)$ 为 λ 的 $2N+1$ 阶多项式， $f_{12}(\lambda)$ 和 $f_{21}(\lambda)$ 为 λ 的 $2N$ 阶多项式. 另一方面，利用 (5.29), (5.36)~ (5.38), 我们发现

$$\alpha_{jx}=1+v\alpha_j^2-(\lambda_j-u)\alpha_j,$$

$$A(\lambda_j)=-\alpha_jB(\lambda_j),\quad C(\lambda_j)=-\alpha_jD(\lambda_j).$$

利用上述等式, 可以证明 $\lambda_j(1 \le j \le 2N)$ 为 $f_{kj}(\lambda)(k,j=1,2)$ 的根, 结合 (5.40), 知道 $f_{ki}(\lambda)$ 能被 $\det T(\lambda)$ 整除. 因此 $(T_x+TU)T^{-1}$ 只能为 λ 的一次多项式, 即

$$T_x + TU = (\tilde{U}_1\lambda + \tilde{U}_0)T, \tag{5.42}$$

其中矩阵 $\tilde{U}_1(x,t)$ 和 $\tilde{U}_0(x,t)$ 不依赖于 λ.

表示 $U = U_1\lambda + U_0$, 其中

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}u & -v \\ 1 & \frac{1}{2}u \end{pmatrix}.$$

则比较 (5.24) 中 λ^{N+1} 和 λ^N 的系数, 得到

λ^{N+1} coeff.: $\tilde{U}_1 = QU_1Q^{-1} = U_1$,

λ^N coeff.: $\tilde{U}_0 = (QU_0 + Q_x + [QQ_{N-1}, U_1])Q^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\tilde{u} & -\tilde{v} \\ 1 & \frac{1}{2}\tilde{u} \end{pmatrix}$,

其中 $\delta_N^2 = 1 + C_{N-1}$ 和 $\tilde{u}, \tilde{v}$ 由 (5.41) 给出.

命题 5.2.2 假设 $\delta_N^2 = 1 + C_{N-1}$, 和 $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ 以及它们的各阶导数当 $|x| \to \infty$ 时都快速趋于零, 则在变换 (5.33) 和 (5.41) 下, (5.35) 中 $\tilde{V}^{(n)}$ 与 $V^{(n)}$ 具有相同的形式.

证明 类似于命题 5.2.1, 我们可以证明 $(T_t + TV^{(n)})T^{-1}$ 为 λ 的 n 阶多项式, 即

$$T_t + TV^{(n)} = \left(\sum_{k=0}^{n} \tilde{V}_k \lambda^{n-k}\right) T, \tag{5.43}$$

其中矩阵 $\tilde{V}_k, (k = 0, 1, \cdots n)$ 不依赖于 λ, 比较 (5.43) 中 λ^{N+n} 的系数, 得到

$$\tilde{V}_0 = QV_0Q^{-1} = V_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 & \tilde{b}_0 \\ \tilde{c}_0 & -\tilde{a}_0 \end{pmatrix}. \tag{5.44}$$

另一方面, 由 (5.35) 我们有

$$\tilde{U}_t - \tilde{V}_x^{(n)} + [\tilde{U}, \tilde{V}^{(n)}] = 0. \tag{5.45}$$

在 (5.44) 中, 由 $\tilde{a}_0 = \alpha$, $\tilde{b} = \tilde{c}_0 = 0$ 出发, 并经零曲率方程 (5.45) 和递推关系 (5.30), 我们知道由 $\tilde{u}$,$\tilde{v}$ 到 $\tilde{a}_k$, $\tilde{b}_k$, $\tilde{c}_k$ 的依赖关系与 u, v 到 a_k,b_k,c_k 的依赖关系相同, 因此, 在变换 (5.33) 和 (5.41) 下, (5.35) 中的 $\tilde{V}^{(n)}$ 与 $V^{(n)}$ 具有相同的形式.

命题 5.2.1 和 5.2.2 表明变换 (5.43) 和 (5.41) 改变 Lax 对 (5.29) 和 (5.31) 为另一相同形式的 Lax 对 (5.34) 和 (5.35), 因此这两种 Lax 对导致相同的色散长水波方程 (5.32), 我们称变换 $(y,u,v)\rightarrow(\tilde{y},\tilde{u},\tilde{v})$ 为色散长水波方程 (5.32) 的 Darboux 变换.

§5.2.2 色散长水波方程的类孤子解

下面, 应用 Darboux 变换 (5.33) 和 (5.41) 构造色散长水波方程 (5.28) 的显式孤子解, 为此我们首先给出它的 Lax 对, 它由 (5.29) 和下列辅助谱问题构成

$$y_t=V^{(2)}y=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{2}(u_x-u^2) & -v\lambda-(v_x+uv)\\ \lambda+u & -\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{2}(u_x-u^2)\end{pmatrix}y. \tag{5.46}$$

此外, 取方程 (5.28) 的平凡解: $u=v=0$, 则 Lax 对 (5.29) 和 (5.46) 的解可选取为

$$y=\begin{pmatrix}e^{\xi/2} & 0\\ \frac{1}{\lambda}e^{\xi/2}-e^{-\xi/2} & e^{-\xi/2}\end{pmatrix},\quad \xi=\lambda x+\lambda^2 t.$$

根据 (5.38), 我们得到

$$\alpha_j=\frac{1}{\lambda_j}-(1+\gamma_j)e^{-\xi_j}, \tag{5.47}$$

其中 $\xi_j=\lambda_j x+\lambda_j^2 t,\ 1\le j\le 2N$. 为简单起见, 我们只讨论 $N=1$ 和 $N=2$ 两种特殊情况

(I) 对 $N=1$, 解代数方程 (5.36) 和 (5.37) 给出

$$B_0=\frac{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)e^{\xi_1+\xi_2}}{(\lambda_2-\lambda_1)e^{\xi_1+\xi_2}+\lambda_1\lambda_2(1+\gamma_2)e^{\xi_1}-\lambda_1\lambda_2(1+\gamma_1)e^{\xi_2}},$$

$$C_0=\frac{(\lambda_1-\lambda_2)[e^{\xi_1}-\lambda_1(1+\gamma_1)][e^{\xi_2}-\lambda_2(1+\gamma_2)]}{(\lambda_2-\lambda_1)e^{\xi_1+\xi_2}+\lambda_1\lambda_2(1+\gamma_2)e^{\xi_1}-\lambda_1\lambda_2(1+\gamma_1)e^{\xi_2}},$$

其中 $\lambda_1\neq\lambda_2,\gamma_1\neq\gamma_2$ 为任意常数. 利用 Darboux 变换 (5.41), 获得比文献 [109] 更一般的类孤子解.

$$\tilde{u}=\frac{\Delta_1}{\Delta_2},\quad \tilde{v}=\frac{\Delta_3}{\Delta_4}, \tag{5.48}$$

其中

$$\begin{aligned}
\Delta_1 =\ & (\lambda_2-\lambda_1)[\lambda_1^3(1+\gamma_1)e^{\xi_1+2\xi_2}-\lambda_2^3(1+\gamma_2)e^{2\xi_1+\xi_2}-2\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)(1+\gamma_1)\\
& (1+\gamma_2)e^{\xi_1+\xi_2}+\lambda_1^3\lambda_2^2(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)^2e^{\xi_1}-\lambda_1^2\lambda_2^3(1+\lambda_1)^2(1+\lambda_2)e^{\xi_2}],\\
\Delta_2 =\ & [(\lambda_2-\lambda_1)e^{\xi_1+\xi_2}+\lambda_1\lambda_2(1+\lambda_2)e^{\xi_1}-\lambda_1\lambda_2(1+\lambda_1)e^{\xi_2}][\lambda_1^2(1+\gamma_1)e^{\xi_2}\\
& -\lambda_2^2(1+\gamma_2)e^{\xi_1}+\lambda_1\lambda_2(1+\gamma_1)(1+\gamma_2)(\lambda_2-\lambda_1)],\\
\Delta_3 =\ & \lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)e^{\xi_1+\xi_2}[\lambda_1^2(1+\gamma_1)e^{\xi_2}-\lambda_2^2(1+\gamma_2)e^{\xi_1}\\
& +\lambda_1\lambda_2(1+\gamma_1)(1+\gamma_2)(\lambda_1-\lambda_2)],\\
\Delta_4 =\ & [(\lambda_1+\lambda_2)e^{\xi_1+\xi_2}-\lambda_1\lambda_2(1+\gamma_2)e^{\xi_1}-\lambda_1\lambda_2(1+\gamma_1)e^{\xi_2}]^2.
\end{aligned}$$

在附录中，我们提供一个简单的 Mathematica 程序验证 (5.48) 为方程 (5.28) 的解，实际上，不难开发一个 Mathematica 程序包用来在计算机上产生方程 (5.28) 的 N 孤子解．应当指出，所给出的解 (5.48) 是方程 (5.28) 单孤子解和双孤子解的统一形式，在 $\gamma_1\neq-1$ 和 $\gamma_2\neq-1$ 情况下，(5.48) 中的解 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 具有双孤子解的性质．当 $\gamma_1=-1$ 或 $\gamma_2=-1$ 时，(5.48) 中的解 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 为通常的单孤子解，例如，取 $\gamma_2=-1$，$\gamma_1\neq-1$, 有

$$\begin{aligned}
\tilde{u} &= \frac{1}{2}\lambda_1\tanh\left[\frac{1}{2}\left(\lambda_1x+\lambda_1^2t-\ln\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2(1+\gamma_1)}\right)\right]+\frac{1}{2}\lambda_1,\\
\tilde{v} &= \frac{1}{4}\lambda_1^2\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}\left(\lambda_1x+\lambda_1^2t-\ln\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2(1+\gamma_1)}\right)\right],
\end{aligned}$$

这种解恰为王明亮利用齐次平衡法所得到的解 [109].

(II) 对 $N=2$, 解代数方程 (5.36) 和 (5.37) 得到

$$B_1=\frac{\Delta_{B_1}}{\Delta},\quad C_1=\frac{\Delta_{C_1}}{\Delta},$$

其中 Δ 为代数方程组 (5.36) 的系数行列式，而 Δ_{B_1} 和 Δ_{C_1} 为 Δ 的第四列分别用向量 $(-\lambda_1^2,-\lambda_2^2,-\lambda_3^2,-\lambda_4^2)^{\mathrm{T}}$ 及 $(-\alpha_1^2\lambda_1^2,-\alpha_2^2\lambda_2^2,-\alpha_3^2\lambda_3^2,-\alpha_4^2\lambda_4^2)^{\mathrm{T}}$ 所得到的行列式，从而利用 Darboux 变换 (5.41), 得到色散长水波方程 (5.28) 的解

$$\tilde{u}=-\frac{C_{1x}}{1+C_1},\quad \tilde{v}=B_1(1+C_1). \tag{5.49}$$

利用 Mathematica 程序，容易给出解 (5.49) 的显式形式，但其表达式十分复杂．类似于 $N=1$ 的情况，公式 (5.49) 实际上以统一的形式含有色散长水波方程的各类 N 孤子解 ($N=1,2,3,4$)．例如，在情况 $\gamma_j\neq-1$ ($j=1,2,3,4$), 这类解具有 4- 孤子性质.

算法 5.2.3 下面是用来产生和验证色散长水波方程 *(5.28)* 孤子解的小程序，为符号运算的方便，我们记：$\lambda_1 \to p[1]$ $\lambda_2 \to p[2]$，$\gamma_1 \to q[1]$，$\gamma_2 \to q[2]$，$\alpha_1 \to a[1]$ $\alpha_2 \to a[2]$，$\tilde{u} \to u$，$\tilde{v} \to v$，$B_0 \to b[0]$，$C_0 \to c[0]$.

```
In[1] := a[1] = 1/p[1] - (1 + q[1]) exp[-p[1] * x - p[1]^2 * t];
    a[2] = 1/p[2] - (1 + q[2]) exp[-p[2] * x - p[2]^2 * t];
    m = {{1, a[1]}, {1, a[2]}}; m[1] = {{1, -p[1]}, {1, -p[2]}};
    m[2] = {{1, -a[1] * p[1]}, {1, -a[2] * p[2]}};
    b[0] = Det[m[1]]/Det[m];
    c[0] = Det[m[2]]/Det[m];
    u = -D[c[0], x]/(1 + c[0]);
    v = b[0] * (1 + c[0]);
    Together[D[u, t] - 2u * D[u, x] - 2D[v, x] + D[u, {x, 2}]]
    Together[D[v, t] - 2D[u * v, x] - D[v, {x, 2}]]
Out[1] = 0
Out[2] = 0
```

§5.3 KP 方程 N- 孤子解的显式公式

通常 KP 方程可认为是 KdV 方程的 2+1 维空间的推广，它在 2+1 维方程中起的作用与 KdV 方程在 1+1 维方程起的作用同样重要 [42,143~147]. 近年来，人们在将 2+1 维方程分解为 1+1 维孤子方程方面作了大量的工作，这种方法提供了类似于线性方程分离变量的技巧 [20,23,148~151]. 例如，利用约束 [149]

$$u = -2pq, \tag{5.50}$$

KP 方程

$$u_1 + 6uu_x + u_{xxx} - 3\partial_x^{-1}u_{yy} = 0, \quad \partial_x^{-1} = \int^x \mathrm{d}x' \tag{5.51}$$

可分解为 1+1 维广义耦合非线性 Schrödinger 方程和 MKdV 方程：

$$ip_y - p_{xx} + 2p^2q = 0, \quad iq_y + q_{xx} - 2pq^2 = 0, \tag{5.52}$$

$$p_t + 4p_{xxx} - 24pqp_x = 0, \quad q_t + 4q_{xx} - 24pqq_x = 0. \tag{5.53}$$

在 (5.51)~(5.53), u 为 x, y, t 的实函数；p, q 为 x, y, t 的复函数. 这意味着如果我们能够得到系统 (5.52) 和 (5.53) 的解，则约束关系 (5.50) 将给出 KP 方程 (5.51)

的解. 系统 (5.52) 和 (5.53) 的 Lax 对分别为如下的 (5.54), (5.56) 以及 (5.55), (5.56)

$$\psi_x = U\psi = (M_1\lambda + M_2)\psi, \tag{5.54}$$

$$\psi_y = V\psi = 2i(M_1\lambda^2 + M_2\lambda + M_3)\psi, \tag{5.55}$$

$$\psi_t = W\psi = -16(M_1\lambda^3 + M_2\lambda^2 + M_3\lambda + M_4)\psi, \tag{5.56}$$

其中

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} pq & -p_x \\ q_x & -pq \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} pq_x - qp_x & p_{xx} - 2p^2q \\ q_{xx} - 2pq^2 & qp_x - pq_x \end{pmatrix}.$$

在约化情形 $p + q^* = 0$, 李翊神给出了系统 (5.52) 和 (5.53) 的一种 Darboux 变换, 由此得到了 KP 方程一些新的解 [8]. 这里我们使用不同的方法构造系统 (5.52) 和 (5.53) 的统一而显式的 N 次 Darboux 变换, 并通过约化技巧将其约化为 NLS 和 MKdV 方程的 N 次 Darboux 变换. 根据这种 Darboux 变换, KP 方程 (5.51) 的解转化为求解两个线性代数方程组, 从而得到 KP 方程一种带有多个参数的统一显式 N- 孤子解公式.

§5.3.1 耦合 NLS-MKdV 系统的 N 次 Darboux 变换

考虑 Lax 对 (5.54)~(5.56) 的如下规范变换

$$\tilde{\psi} = T\psi. \tag{5.57}$$

要求 $\tilde{\psi}$ 也满足相同形式的 Lax 对 (5.54)~(5.56), 即

$$\tilde{\psi}_x = \tilde{U}\tilde{\psi}, \quad \tilde{U} = (T_x + TU)T^{-1}, \tag{5.58}$$

$$\tilde{\psi}_y = \tilde{V}\tilde{\psi}, \quad \tilde{V} = (T_y + TV)T^{-1}, \tag{5.59}$$

$$\tilde{\psi}_t = \tilde{W}\tilde{\psi}, \quad \tilde{W} = (T_t + TW)T^{-1}. \tag{5.60}$$

通过交叉微分 (5.58)~ (5.60), 得到

$$\tilde{U}_y - \tilde{V}_x + [\tilde{U}, \tilde{V}] = T(U_y - V_x + [U, V])T^{-1},$$

$$\tilde{U}_t - \tilde{W}_x + [\tilde{U}, \tilde{W}] = T(U_t - W_x + [U, W])T^{-1},$$

这表明要使得系统 (5.52) 和 (5.53) 在规范变换 (5.57) 下不变，应要求 $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ 和 $\tilde{W}$ 与 U, V 和 W 有相同的形式, 同时 U, V, W 中旧的位势 p 和 q 变为 $\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}$ 中新的位势函数 $\tilde{p}, \tilde{q}$. 我们直接构造耦合系统 (5.52) 和 (5.53) 的 N 次 Darboux 变换如下：

假设 $(\phi_1(x,y,t,\lambda), \phi_2(x,y,t,\lambda))^{\mathrm{T}}$ 和 $(\psi_1(x,y,t,\lambda), \psi_2(x,y,t,\lambda))^{\mathrm{T}}$ 为谱问题 (5.54)~(5.56) 的两个基本解，并利用它们定义两个关于 A_k, B_k, C_k 和 D_k $(0 \le k \le N-1)$ 线性代数方程组

$$\sum_{k=0}^{N-1}(A_k + \alpha_j B_k)\lambda_j^k = -\lambda_j^N, \quad 1 \le j \le 2N, \tag{5.61}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}(C_k + \alpha_j D_k)\lambda_j^k = -\alpha_j\lambda_j^N, \quad 1 \le j \le 2N, \tag{5.62}$$

其中

$$\alpha_j = \frac{\phi_2(\lambda_j) - \gamma_j\psi_2(\lambda_j)}{\phi_1(\lambda_j) - \gamma_j\psi_1(\lambda_j)}, \quad 1 \le j \le 2N, \tag{5.63}$$

这里 λ_j 和 γ_j 为适当选取的参数使得 (5.61) 和 (5.62) 的系数行列式非零，从而 A_k, B_k, C_k 和 D_k 可被 (5.61) 和 (5.62) 惟一确定. 下面我们令

$$T = T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} = I\lambda^N + \sum_{k=0}^{N-1} Q_k\lambda^k, \tag{5.64}$$

这是关于 λ 的矩阵系数的 N 次多项式

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_k = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix}.$$

由 (5.61), (5.62) 和 (5.64), 容易看出 $\det T(\lambda)$ 为 λ 的 $2N$ 次多项式，其根为 λ_j $(1 \le j \le 2N)$, 因此我们有

$$\det T(\lambda) = \prod_{j=1}^{2N}(\lambda - \lambda_j). \tag{5.65}$$

命题 5.3.1 由 (5.58) 决定的矩阵 $\tilde{U}$ 与 U 具有相同的形式，即

$$\tilde{U} = M_1\lambda + \tilde{M}_2,$$

其中 $\tilde{M}_2$ 以及下文的 $\tilde{M}_3, \tilde{M}_4$ 将 $M_i, (i = 2,3,4)$ 中 p, q 用 $\tilde{p}, \tilde{q}$ 代替产生， p, q 与 $\tilde{p}, \tilde{q}$ 之间的变换由下式给出

$$\tilde{p} = p + 2B_{N-1}, \quad \tilde{q} = q - 2C_{N-1}. \tag{5.66}$$

变换 (5.57) 和 (5.66): $(\psi,p,q)\to(\tilde{\psi},\tilde{p},\tilde{q})$ 称为谱问题 (5.54) 的 Darboux 变换.

证明 假设 $T^{-1}=T^*/\det T$ 且

$$(T_x+TU)T^*=\begin{pmatrix}f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda)\\ f_{21}(\lambda) & f_{22}(\lambda)\end{pmatrix}.$$

可见, $f_{11}(\lambda)$ 和 $f_{22}(\lambda)$ 为 λ $2N+1$ 次多项式, $f_{12}(\lambda)$ 和 $f_{21}(\lambda)$ 为 λ 的 $2N$ 次多项式.

另一方面, 利用 (5.54), (5.61)~(5.63), 我们发现

$$\alpha_{jx}=q+2\lambda_j\alpha_j-p\alpha_j^2,$$

$$A(\lambda_j)=-\alpha_jB(\lambda_j),\quad C(\lambda_j)=-\alpha_jD(\lambda_j),$$

由如上等式, 容易验证 λ_j $(1\le j\le 2N)$ 为 $f_{kj}(\lambda)$ $(k,j=1,2)$ 的根, 与 (5.65) 结合, 得到 $f_{kj}(\lambda)$ 能被 $\det T$ 整除, 因此 $(T_x+TU)T^{-1}$ 为 λ 的一阶多项式, 即

$$T_x+TU=(\tilde{U}_1\lambda+\tilde{U}_2)T, \tag{5.67}$$

其中矩阵 $\tilde{U}_1(x,y,t)$ 和 $\tilde{U}_0(x,y,t)$ 不依赖于 λ. 将 T 和 U 代入 (5.67) 并比较 λ^{N+1} 和 λ^N 的系数, 得到

$(N+1)$th coeff.: $\tilde{U}_1=M_1$,

(N)th coeff.: $\tilde{U}_2=M_2+Q_{N-1}M_1-M_1Q_{N-1}=\tilde{M}_2$,

其中 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 由 (5.66) 给定.

下面证明在变换 (5.57) 和 (5.66) 下, (5.59), (5.60) 中的 $\tilde{V},\tilde{W}$ 与 V,W 具有相同的形式.

命题 5.3.2 *在变换 (5.57) 和 (5.66) 下, (6.59) 中的矩阵 $\tilde{V}$ 与 V 具有相同的形式, 即 $\tilde{V}=2i(M_1\lambda^2+\tilde{M}_2\lambda+\tilde{M}_3)$.*

证明 用类似命题 5.3.1 的方法, 可以证明 $(T_y+TV)T^{-1}$ 为 λ 的二阶矩阵系数多项式, 即

$$T_y+TV=(\tilde{V}_1\lambda^2+\tilde{V}_2\lambda+\tilde{V}_3)T. \tag{5.68}$$

比较 (5.68) 中 λ^{N+j} $(j=0,1,2)$ 的系数, 得到

$(N+2)$th coeff: $\tilde{V}_1=M_1$.

$(N+1)$th coeff: $\tilde{V}_2=M_2+[Q_{N-1},M_1]=\tilde{M}_2$.

(N)th coeff:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_3&=M_3+[Q_{N-2},M_1]+Q_{N-1}M_2-\tilde{M}_2Q_{N-1}\\&=M_3+(Q_{N-1}M_2-\tilde{M}_2Q_{N-1})^{\rm diag}\\&\quad+([Q_{N-2},M_1]+Q_{N-1}M_2-\tilde{M}_2Q_{N-1})^{\rm off},\end{aligned} \tag{5.69}$$

这里及下文 "diag" 和 "off " 分别表示矩阵的对角和非对角部分.

再比较 (5.67) 中 λ^{N-1} 的系数，我们发现

$$([Q_{N-2}, M_1] + Q_{N-1}M_2 - \tilde{M}_2Q_{N-1})^{\text{off}} = -Q^{\text{off}}_{N-1x}, \tag{5.70}$$

$$(Q_{N-1}M_2 - \tilde{M}_2Q_{N-1})^{\text{diag}} = -Q^{\text{diag}}_{N-1x}. \tag{5.71}$$

将 (5.70) 代入 (5.69), 直接计算得到 $\tilde{V}_3 = \tilde{M}_3$.

命题 5.3.3 *在变换 (5.57) 和 (5.66) 下，(5.60) 中的矩阵 $\tilde{W}$ 与 V 具有相同的形式，即，$\tilde{W} = -6(M_1\lambda^3 + \tilde{M}_2\lambda^2 + \tilde{M}_3\lambda + M_4)$.*

证明 类似于命题 5.3.1 和 5.3.2, 证明 $(T_t + TW)T^{-1}$ 为 λ 的 3 阶多项式，即

$$T_t + TW = (\tilde{W}_1\lambda^3 + \tilde{W}_2\lambda^2 + \tilde{W}_3\lambda + \tilde{W}_4)T. \tag{5.72}$$

比较 (6.72) 中 λ^{N+j} $(j = 0, 1, 2, 3)$ 的系数，得到

$(N+3)$th coeff.: $\tilde{W}_1 = M_1$.

$(N+2)$th coeff.: $\tilde{W}_2 = M_2 + [Q_{N-1}, M_1] = \tilde{M}_2$.

$(N+1)$th coeff.: $\tilde{W}_3 = M_3 + [Q_{N-2}, M_1] + Q_{N-1}M_2 - \tilde{M}_2Q_{N-1} = \tilde{M}_3$.

(N)th coeff.:

$$\begin{aligned}\tilde{W}_4 &= M_4 + Q_{N-1}M_3 - \tilde{M}_3Q_{N-1} + [Q_{N-3}, M_1] + Q_{N-2}M_2 - \tilde{M}_2Q_{N-2} \\ &= M_4 + Q_{N-1}M_3 - \tilde{M}_3Q_{N-1} + (Q_{N-2}M_2 - \tilde{M}_2Q_{N-2})^{\text{diag}} \\ &\quad + ([Q_{N-3}, M_1] + Q_{N-2}M_2 - \tilde{M}_2Q_{N-2})^{\text{off}}.\end{aligned} \tag{5.73}$$

注意到

$$(Q_{N-2}M_2 - \tilde{M}_2Q_{N-2})^{\text{diag}} = Q^{\text{off}}_{N-2}M_2 - \tilde{M}_2Q^{\text{off}}_{N-2}, \tag{5.74}$$

并由 (5.70), 有

$$Q^{\text{off}}_{N-2} = -\frac{1}{2}(Q_{N-1x} + Q_{N-1}M_2 - \tilde{M}_2Q_{N-1})^{\text{off}}M_1. \tag{5.75}$$

比较 (5.67) 中 λ^{N-2} 的系数，得到

$$([Q_{N-3}, M_1] + Q_{N-2}M_2 - \tilde{M}_2Q_{N-2})^{\text{off}} = -Q^{\text{off}}_{N-2x}. \tag{5.76}$$

利用 (5.71), (5.73)~(5.76), 直接计算得到 $\tilde{V}_4 = \tilde{M}_4$.

命题 5.3.1~5.3.3 表明变换 (5.57) 和 (5.66) 将 Lax 对 (5.54)~(5.56) 变为相同形式的 Lax 对 (5.58)~(5.60), 因此这两种 Lax 对都导致耦合方程 (5.52)~(5.53), 我们称变换 $(\psi, p, q) \to (\tilde{\psi}, \tilde{p}, \tilde{q})$ 为耦合方程 (5.52)~(5.53) 的 Darboux 变换. 概括起来，得到

定理 5.3.4 在 Darboux 变换 (5.57) 和 (5.66) 下耦合方程 (5.52)~(5.53) 的解 (p,q) 被映为它们新的解 $(\tilde{p},\tilde{q})$, 其中 B_{N-1} 和 C_{N-1} 由线性代数方程组 (5.61) 和 (5.62) 确定.

§5.3.2 Darboux 变换的约化及其在 KP 方程应用

在这一节，我们讨论 KP 方程 Darboux 变换的约化和并由此构造 KP 方程的多孤子解，为此令 $q=-p^*$, 则约束 (5.50) 约化为

$$u=2|p|^2. \tag{5.77}$$

系统 (5.52) 和 (5.53) 分别约化为通常的非线性 Schrödinger 方程和 MKdV 方程

$$ip_y-p_{xx}-2p|p|^2=0, \tag{5.78}$$

$$p_t+4p_{xxx}+24|p|^2p_x=0. \tag{5.79}$$

选取 Lax 对 (5.54)~(5.56) 的两个解

$$\phi(\lambda)=(\phi_1(\lambda),\phi_2(\lambda))^{\mathrm{T}},\quad \psi(\lambda)=(-\phi_2^*(\lambda^*),\phi_1^*(\lambda^*))^{\mathrm{T}}.$$

参数

$$\lambda_{2j}=\lambda_{2j-1}^*,\quad \gamma_{2j}=-\gamma_{2j-1}^{*^{-1}},\quad 1\leq j\leq N.$$

则容易证明 $\alpha_{2j}^{-1}=-\alpha_{2j-1}^*$, $D_k^*=A_k$, $C_k^*=-B_k$, $(0\leq k\leq N-1)$. 这样，(5.61) 和 (5.62) 约化为

$$\sum_{k=0}^{N-1}(A_k+\alpha_{2j-1}B_k)\lambda_{2j-1}^k=-\lambda_{2j-1}^N, \tag{5.80}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}(\alpha_{2j-1}^*A_k-B_k)\lambda_{2j-1}^{*^k}=-\alpha_{2N-1}^*\lambda_{2j-1}^{*^N},\quad 1\leq j\leq N, \tag{5.81}$$

以及

$$\alpha_{2j-1}=\frac{\phi_2(\lambda_{2j-1})-\gamma_{2j-1}\psi_2(\lambda_{2j-1})}{\phi_1(\lambda_{2j-1})-\gamma_{2j-1}\psi_1(\lambda_{2j-1})}. \tag{5.82}$$

于是得到如下定理

定理 5.3.5 假设 α_{2j-1} $(1\leq j\leq N)$ 由 (6.82) 确定，而 A_k, B_k 由线性代数方程组 (5.80), (5.81) 给出，则在 Darboux 变换

$$\tilde{p}=p+2B_{N-1} \tag{5.83}$$

作用下，非线性 Schrödinger 方程 (5.78) 和 MKdV 方程 (5.79) 解 p 被映为它们新的解 $\tilde{p}$ 并且 KP 方程的解由 (5.77) 给出.

注释 5.3.6 这里给出的 Darboux 变换 (5.83) 有如下特点：可以解释为初始解 p 的非线性叠加和 NLS-MKdV 系统 (5.78) 和 (5.79) 的 N 孤子解，而且，NLS-MKdV 系统的求解被转化为求解一线性代数方程组 (5.80), (5.81)，这样很容易在计算机上利用符号运算产生多孤子解.

下面，应用 Darboux 变换 (5.83) 构造 KP 方程的 N- 孤子解，将 $p=0$ 代入 Lax 对 (5.54)~(5.56)，我们发现它们的两个基本解可选取为

$$\phi(\lambda)=\begin{pmatrix}\exp(-\lambda x-2\lambda^2 y+16\lambda^3 t)\\ 0\end{pmatrix},\quad \psi(\lambda)=\begin{pmatrix}0\\ \exp(\lambda x+2\lambda^2 y-16\lambda^3 t)\end{pmatrix}.$$

取

$$\lambda_{2j-1}=\xi_j+i\eta_j,\quad \gamma_{2j-1}=\exp(\delta_j+i\mu_j),\quad 1\le j\le N, \tag{5.84}$$

其中 ξ_j, η_j, δ_j 和 μ_j 为实数. 根据 (5.82)，我们有

$$\alpha_{2j-1}=-\exp(X_j+iY_j), \tag{5.85}$$

其中

$$\begin{aligned}&X_j=2\xi_j x-8\xi_j\eta_j y-32\xi_j(\xi_j^2-3\eta_j^2)t+\delta_j,\\ &Y_j=2\eta_j x+4(\xi_j^2-\eta_j^2)y+32\eta_j(\eta_j^2-3\xi_j^2)t+\mu_j,\quad 1\le j\le N\end{aligned} \tag{5.86}$$

解代数方程组 (5.80)~(5.81) 并利用 (5.77), (5.83)，容易得到 KP 方程 (5.51) 方程 N- 孤子解的显式公式

$$\tilde{p}=2\left|\frac{\Delta_{B_{N-1}}}{\Delta}\right|^2, \tag{5.87}$$

其中 Δ 表示代数方程组 (5.80)~(5.81) 的系数行列式，即

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & \alpha_1 & \lambda_1 & \alpha_1\lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{N-1} & \alpha_1\lambda_1^{N-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & \alpha_{2N-1} & \lambda_{2N-1} & \alpha_{2N-1}\lambda_{2N-1} & \cdots & \lambda_{2N-1}^{N-1} & \alpha_{2N-1}\lambda_{2N-1}^{N-1}\\ \alpha_1^* & -1 & \alpha_1^*\lambda_1^* & -\lambda_1^* & \cdots & \alpha_1^*\lambda_1^{*N-1} & -\lambda_1^{*N-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \alpha_{2N-1}^* & -1 & \alpha_{2N-1}^*\lambda_{2N-1}^* & -\lambda_{2N-1}^* & \cdots & \alpha_{2N-1}^*\lambda_{2N-1}^{*N-1} & -\lambda_{2N-1}^{*N-1}\end{vmatrix},$$

而 $\Delta_{B_{N-1}}$ 通过将 Δ 的第 $2N$ 列用向量 $(-\lambda_1^N, \cdots, -\lambda_{2N-1}^N, -\alpha_1^*\lambda_1^{*N}, \cdots, -\alpha_{2N-1}^*\lambda_{2N-1}^{*N})^{\mathrm{T}}$ 代替得到，α_{2j-1} 和 λ_{2j-1} 由 (5.84) 和 (5.85) 给出. 表达式

(5.87) 为所有 k- 孤子解 $(k=1,2,\cdots,N)$ 的统一公式，由此容易得到 KP 方程 (5.51) 的各类多孤子解，如，对于 $N=1$, 我们得到单孤子解 [42]

$$\tilde{p}=2\eta_1^2\mathrm{sech}^2(X_1). \tag{5.88}$$

对 $N=2$, 我们得到含有 8 个任意常数 $\xi_j,\eta_j,\delta_j,\mu_j$, $(j=1,2)$ 的单孤子解和双孤子解统一公式

$$\tilde{p}=\frac{a^2+b^2}{c^2},$$

其中

$$\begin{aligned}a=&\sum_{\substack{i,j=1,2\\ i\neq j}}\{\eta_i[(\xi_i-\xi_j)^2+(\eta_i^2-\eta_j^2)](\cos(Y_i)\cosh(X_j)\\&+2\eta_i\eta_j(\xi_i-\xi_j)\sin(Y_i)\sinh(X_j)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b=&\sum_{\substack{i,j=1,2\\ i\neq j}}\{\eta_i[(\xi_i-\xi_j)^2+(\eta_i^2-\eta_j^2)]\sin(Y_i)\cosh(X_j)\\&-2\eta_i\eta_j(\xi_i-\xi_j)\cos(Y_i)\sinh(X_j)\},\\ c=&-[(\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2]\cosh(X_1)\cosh(X_2)-2\eta_1\eta_2\cosh(X_1-X_2)\\&+2\eta_1\eta_2\cos(Y_1-Y_2).\end{aligned}$$

其中 X_1, X_2, Y_1 和 Y_2 由 (5.86) 给出. 这里给出的双孤子解不同于文献 [42,149] 的结果. 取 $\xi_2=\eta_2=\delta_2=\mu_2=0$, 得到单孤子解 (5.88).

§5.4 KP 方程新的分解和 Darboux 变换

最近，Lou 和 Hu 发现了 2+1 维 KP 方程 [367]

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}+3u_{yy}=0. \tag{5.89}$$

如下一种新的分解

$$u=-2G, \tag{5.90}$$

其中 G 满足 1+1 维 Broer-Kaup 方程

$$\begin{aligned}&H_y=H_{xx}-2HH_x-2G_x,\\&G_y=-G_{xx}-2(GH)_x\end{aligned} \tag{5.91}$$

和 1+1 维高阶 Broer-Kaup 方程

$$\begin{aligned} H_t &= -4(H_{xx} + H^3 + 6HG - 3HH_x)_x, \\ G_t &= -4(G_{xxx} + 3G_xH + 3H^2G + 3G^3)_x. \end{aligned} \tag{5.92}$$

显然，对于方程 (5.91)~(5.92) 的每组解 (H,G), 则约束关系 (5.90) 便给出 KP 的一个解. 实际上，许多作者利用各种方法构造了方程 (5.91) 和 (5.92) 的精确解 [368,369]. 这里我们应用 Darboux 变换构造方程 (5.90) 和 (5.92) 新的精确解，从而获得 KP 方程 (5.90) 的解.

方程 (5.91) 和 (5.92) 的 Lax 对分别由下列方程 (5.93),(5.94) 和 (5.93),(5.95) 构成

$$\psi_x = U\psi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda - H) & -G \\ 1 & -\frac{1}{2}(\lambda - H) \end{pmatrix} \psi, \tag{5.93}$$

$$\psi_y = V^{(1)}\psi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}(H_x - H^2) & G\lambda + G_x + HG \\ -\lambda - H & \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}(H_x - H^2) \end{pmatrix} \psi, \tag{5.94}$$

$$\psi_t = V^{(2)}\psi = 4\begin{pmatrix} v_{11}^{(2)} & v_{12}^{(2)} \\ v_{21}^{(2)} & -v_{11}^{(2)} \end{pmatrix} \psi, \tag{5.95}$$

其中

$$\begin{aligned} v_{11}^{(2)} &= -\frac{1}{2}\lambda^3 - G\lambda + \frac{1}{2}(H_{xx} - 2G_x + H^3 + 2HG - 3HH_x), \\ v_{12}^{(2)} &= G\lambda^2 + (G_x + HG)\lambda + [(G_x + 2HG)_x + H(G_x + 2HG) + 2G^2], \\ v_{21}^{(2)} &= -\lambda^2 - H\lambda + (H_x - 2G - H^2). \end{aligned}$$

考虑谱问题 (5.93)~(5.95) 的规范变换

$$\tilde{\psi} = T\psi. \tag{5.96}$$

要求 $\tilde{\psi}$ 满足相同形式的谱问题，即

$$\tilde{\psi}_x = \tilde{U}\tilde{\psi}, \quad \tilde{U} = (T_x + TU)T^{-1}, \tag{5.97}$$

$$\tilde{\psi}_y = \tilde{V}^{(1)}\tilde{\psi}, \quad \tilde{V}^{(1)} = (T_y + TV^{(1)})T^{-1}, \tag{5.98}$$

$$\tilde{\psi}_t = \tilde{V}^{(2)}\tilde{\psi}, \quad \tilde{V}^{(2)} = (T_t + TV^{(2)})T^{-1}. \tag{5.99}$$

假设 $\phi = (\phi_1, \phi_2)^{\mathrm{T}}$ 和 $\psi = (\psi_1, \psi_2)^{\mathrm{T}}$ 为谱问题 (5.93) 的两个基本解，由此定义矩阵

$$T = T(\lambda) = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda + A_0 & B_0 \\ \delta^2 - 1 & \lambda + D_0 \end{pmatrix}, \tag{5.100}$$

其中

$$A_0 = \frac{\alpha_2\lambda_1 - \alpha_1\lambda_2}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad B_0 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad D_0 = \frac{\alpha_2\lambda_2 - \alpha_1\lambda_1}{\alpha_1 - \alpha_2}, \tag{5.101}$$

$$\delta^2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_1\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2)}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad \alpha_j = \frac{\phi_2(\lambda_j) - \gamma_j\psi_2(\lambda_j)}{\phi_1(\lambda_j) - \gamma_j\psi_1(\lambda_j)}, \quad j = 1, 2, \tag{5.102}$$

参数 λ_j 和 γ_j $(\lambda_1 \neq \lambda_2, \gamma_1 \neq \gamma_2)$ 适当选取，使得方程组 (5.101) 和 (5.102) 的系数行列式非零. 由 (5.100)~(5.102), 得到

$$\det T = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2). \tag{5.103}$$

命题 5.4.1 由 (5.97) 确定的矩阵 $\tilde{U}$ 与 U 具有相同的形式，即

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda - \tilde{H}) & -\tilde{G} \\ 1 & -\frac{1}{2}(\lambda - \tilde{H}) \end{pmatrix},$$

其中新、旧位势之间的变换由下式给出

$$\tilde{H} = H - 2\partial_x \ln \delta, \quad \tilde{G} = \delta^2(G + B_0). \tag{5.104}$$

证明 令 $T^{-1} = T^*/\det T$,

$$(T_x + TU)T^* = \begin{pmatrix} f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda) \\ f_{21}(\lambda) & f_{22}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{5.105}$$

易见 $f_{11}(\lambda)$ 和 $f_{22}(\lambda)$ 为 λ 的三阶多项式, $f_{12}(\lambda)$ 和 $f_{21}(\lambda)$ 为 λ 的二阶多项式. 利用 (5.93), (5.100)~(5.102), 可得

$$\alpha_{jx} = 1 - (\lambda_j - H)\alpha_j + G\alpha_j^2, \tag{5.106}$$

$$\lambda_j + A_0 = -\alpha_j B_0, \quad \delta^2 - 1 = -\alpha_j(\lambda_j + D_0). \tag{5.107}$$

利用 (5.106) 和 (5.107), 可以证实 λ_1 和 λ_2 为 $f_{kj}(\lambda)$ $(k, j = 1, 2)$ 的根. 再注意到方程 (5.103), 则有

$$\det T \mid f_{kj}(\lambda), \quad k, j = 1, 2.$$

于是方程 (5.105) 可写为

$$(T_x + TU)T^* = (\det T)P(\lambda),$$

即

$$T_x + TU = P(\lambda)T, \tag{5.108}$$

其中

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} p_{11}^{(1)}\lambda + p_{11}^{(0)} & p_{12}^{(0)} \\ p_{21}^{(0)} & p_{22}^{(1)}\lambda + p_{22}^{(0)} \end{pmatrix},$$

而 $p_{kj}^{(l)}$ 不依赖于 λ.

比较方程 (5.108) 的 λ^2, λ 和 λ^0 系数，得到

$$p_{11}^{(1)} = -p_{22}^{(1)} = \frac{1}{2},\ \ p_{11}^{(0)} = -p_{22}^{(0)} = -\frac{1}{2}(H - 2\partial_x \ln\delta) = -\frac{1}{2}\tilde{H},$$

$$p_{12}^{(0)} = -\delta^2(G + B_0) = -\tilde{G},\ \ p_{21}^{(0)} = 1.$$

$$D_0 - \delta^2 A_0 = (\delta^2 - 1)H - 2\delta\delta_x, \tag{5.109}$$

$$A_0 G - \delta^{-2}\tilde{G}D_0 = B_{0x} + HB_0. \tag{5.110}$$

式子 (5.109) 和 (5.110) 后边将利用.

假设 ϕ 和 ψ 同时满足方程 (5.94), 则有

命题 5.4.2 (5.98) 中的 $\tilde{V}^{(1)}$ 与 $V^{(1)}$ 具有相同的形式，其中旧的位势 H 和 G 与新的位势 $\tilde{H}$ 和 $\tilde{G}$ 由 Darboux 变换 (5.104) 给出.

证明 类似于命题 5.4.1, 记 $T^{-1} = T^*/\det T$,

$$(T_y + TV^{(1)})T^* = \begin{pmatrix} g_{11}(\lambda) & g_{12}(\lambda) \\ g_{21}(\lambda) & g_{22}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{5.111}$$

直接计算，知道 $g_{11}(\lambda), g_{22}(\lambda)$ 和 $g_{12}(\lambda), g_{21}(\lambda)$ 分别为 λ 的四阶和三阶多项式. 利用 (5.93) 和 (5.102), 得到

$$\alpha_{jy} = -(\lambda_j + H) + (\lambda_j^2 + H_x - H^2)\alpha_j - (G\lambda_j + G_x + HG)\alpha_j^2. \tag{5.112}$$

利用 (5.107) 和 (5.112), 可以验证 λ_1 和 λ_2 为 $g_{kj}(\lambda)$ $(k, j = 1, 2)$ 的根. 于是方程 (5.111) 可改写为

$$(T_y + TV)T^* = (\det T)Q(\lambda),$$

其中

$$Q(\lambda)=\begin{pmatrix} q_{11}^{(2)}\lambda^2+q_{11}^{(1)}\lambda+q_{11}^{(0)} & q_{12}^{(1)}\lambda+q_{12}^{(0)} \\ q_{21}^{(1)}\lambda+q_{21}^{(0)} & q_{22}^{(2)}\lambda^2+q_{22}^{(1)}\lambda+q_{22}^{(0)} \end{pmatrix},$$

即

$$T_y+TV^{(1)}=Q(\lambda)T. \tag{5.113}$$

比较方程 (5.113) 中 λ^3, λ^2 和 λ 的系数，得到

$$q_{11}^{(2)}=-q_{22}^{(2)}=-\frac{1}{2},\ \ q_{11}^{(1)}=q_{22}^{(1)}=0,\ \ q_{12}^{(1)}=\tilde{G},\ \ q_{21}^{(1)}=-1.$$

$$q_{12}^{(0)}=\delta^2(G_x+HG+A_0G-\delta^{-2}\tilde{G}D_0), \tag{5.114}$$

$$q_{21}^{(0)}=-\delta^{-2}(H+D_0-\delta^2A_0), \tag{5.115}$$

$$q_{11}^{(0)}=-q_{22}^{(0)}=\partial_y\ln\delta-\frac{1}{2}(H_x-H^2)-\delta^2B_0+(1-\delta^2)G. \tag{5.116}$$

将 (5.109) 和 (5.110) 代入 (5.114) 和 (5.115) 给出

$$q_{12}^{(0)}=\tilde{G}_x+\tilde{H}\tilde{G},\quad q_{21}^{(0)}=-\tilde{H}.$$

利用 (5.102), (5.104), (5.112) 和 (5.116), 可以证明

$$q_{11}^{(0)}=-q_{22}^{(0)}=-\frac{1}{2}(\tilde{H}_x-\tilde{H}^2).$$

假设方程 (5.93) 和 (5.94) 的解 ϕ, ψ 也满足方程 (5.95), 则利用类似于命题 5.4.2 的方法，可以证明

命题 5.4.3 由 (5.99) 确定的 $\tilde{V}^{(2)}$ 与 $V^{(2)}$ 具有相同的形式，其中旧的位势 H 和 G 与新的位势 $\tilde{H}$ 和 $\tilde{G}$ 由 Darboux 变换 (5.104) 给出.

命题 5.4.1~5.4.3 表明变换 (5.93) 和 (5.104) 将 Lax 对 (5.93)~(5.95) 变为相同形式的 Lax 对 (5.97)~(5.99). 从而两种 Lax 对 (5.93), (5.94) 和 (5.97), (5.98) 都导致相同的 Broer-Kaup 方程 (5.91). 两种 Lax 对 (5.93), (5.95) 和 (5.97), (5.99) 都导致相同的高阶 Broer-Kaup 方程 (5.92).

概括起来，有

定理 5.4.4 假设 (H,G) 为 1+1 维 Broer-Kaup 方程 (5.91) 和高阶 Broer-Kaup 方程 (5.92) 的解，则由 (5.104) 定义的 $(\tilde{H},\tilde{G})$ 为其新解；从而

$$\tilde{u}=-2\tilde{G} \tag{5.117}$$

为 2+1 维 KP 方程 (5.90) 的新解.

下面，我们应用 Darboux 变换 1+1 维 Broer-Kaup 方程 (5.91), 高阶 Broer-Kaup 方程 (5.92) 和 2+1 维 KP 方程 (5.90) 的解. 选取方程 (5.91) 和 (5.92) 的种子解 $H=\alpha=\mathrm{const}$, $G=0$, 则 Lax 对 (5.93)~(5.95) 的解可取为

$$\phi(\lambda)=\begin{pmatrix} e^{\xi} \\ \frac{1}{\lambda-\alpha}e^{\xi} \end{pmatrix},\quad \psi=\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\xi} \end{pmatrix},$$

其中 $\xi=\frac{1}{2}(\lambda-\alpha)x-\frac{1}{2}(\lambda^2-\alpha^2)y-2(\lambda^3-\alpha^3)t$. 由 (5.101) 和 (5.102), 得到

$$\alpha_j=\frac{1}{\lambda_j-\alpha}-\gamma_j e^{-2\xi_j},\quad j=1,2,$$
$$B_0=\frac{c_1}{c_2+c_3e^{-2\xi_1}+c_4e^{-2\xi_2}},$$

$$\delta^2=\frac{c_5e^{-2\xi_1}+c_6e^{-2\xi_2}+c_7e^{-2(\xi_1+\xi_2)}}{c_2+c_3e^{-2\xi_1}+c_4e^{-2\xi_2}},$$

其中

$$\xi_j=\frac{1}{2}(\lambda_j-\alpha)x-\frac{1}{2}(\lambda_j^2-\alpha^2)y-2(\lambda_j^3-\alpha^3)t,\quad \lambda_j\neq 0, j=1,2,$$
$$c_1=(\lambda_1-\alpha)(\lambda_2-\alpha)(\lambda_2-\lambda_1),\quad c_2=\lambda_2-\lambda_1,$$
$$c_3=-\gamma_1(\lambda_1-\alpha)(\lambda_2-\alpha),\quad c_4=\gamma_2(\lambda_1-\alpha)(\lambda_2-\alpha),$$
$$c_5=-\gamma_1(\lambda_1-\alpha)^2,\quad c_6=\gamma_2(\lambda_2-\alpha)^2,\quad c_7=\gamma_1\gamma_2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\alpha)(\lambda_2-\alpha).$$

因此，利用 Darboux 变换 (5.104) 得到方程 (5.91) 和 (5.92) 的显式解

$$\tilde{H}=\alpha-\partial_x\ln\frac{c_5e^{-2\xi_1}+c_6e^{-2\xi_2}+c_7e^{-2(\xi_1+\xi_2)}}{c_2+c_3e^{-2\xi_1}+c_4e^{-2\xi_2}}, \tag{5.118}$$

$$\tilde{G}=\frac{c_1(c_5e^{-2\xi_1}+c_6e^{-2\xi_2}+c_7e^{-2(\xi_1+\xi_2)})}{(c_2+c_3e^{-2\xi_1}+c_4e^{-2\xi_2})^2}. \tag{5.119}$$

进一步利用变换 (5.117), 我们得到 KP 方程的新解

$$\tilde{u}=-\frac{2c_1(c_5e^{-2\xi_1}+c_6e^{-2\xi_2}+c_7e^{-2(\xi_1+\xi_2)})}{(c_2+c_3e^{-2\xi_1}+c_4e^{-2\xi_2})^2}. \tag{5.120}$$

我们看到，解 (5.118)~(5.120) 含有 5 个任意参数 $\alpha,\lambda_1,\lambda_2,\gamma_1$ 和 γ_2, 可通过选取不同的参数得到各种特解.

§5.5　广义 q-KdV 方程族及其统一的显式 Darboux 变换

近年来, 在数学物理领域, 人们对 Lie 代数的量子形变 (q-deformation) 越来越感兴趣 [152~157], 量子 Lie 代数的思想来源于可积格子模型量子 Yang-Baxter 方程解的研究 [157], 量子群的成功启发人们寻找可扮演量子形变新的目标, 如, q- 形式的 Virasoro 代数, W- 代数, 甚至 q- 形式的 KdV 系统. 最近, 一种新的 q- 形式的 KdV 方程族被提出并引起了人们的研究兴趣 [153~156,158~162], 基本上, 这种形变是通过在 Lax 公式中引入参数 q 来得到并使得当 q 趋于 1 时, 这种形变系统恢复到通常的 KdV 方程族. 关于 q- 形式的 KdV 方程族的各类性质, 如无穷守恒律 [153], 双 Hamilton 结构 [155],Virasoro 代数, W- 代数 [154,155] 和 Bäcklund 变换 [161] 等已被广泛研究, 但与 KdV 方程族相比, 许多问题仍然没有解决需进一步研究.

在这一节, 将 Darboux 矩阵方法 [2,92] 进一步推广到 q-KdV 方程族, 并证明这种方法对 q- 形式的微分方程仍然有效. 通过对经典 q-KdV 方程族的 Lax 对适当变形, 我们使用矩阵形式的 Lax 对推导一种广义 q-KdV 方程族, 该方程族不同于普通的 q-KdV 方程族 [153~156,158~161], 它的系数明显的依赖与时间变量 t, 同时, 我们看出这种形式是对 q-KdV 方程族更清楚的一种描述方式. 基于文献 [2,92] 的思想, 我们建立整个 q-KdV 方程族一种统一而显式的 Darboux 变换, 并证明了这种 Darboux 变换的 auto-Bäcklund 变换性质、可换定理和非线性叠加公式. 利用 Darboux 变换我们给出 q-KdV 方程族一种统一孤子解公式, 特别我们给出了单孤子解和双孤子解的显式公式.

§5.5.1　广义 q-KdV 方程族

为应用 q- 形式的微分算子研究 q-KdV 方程族, 我们首先介绍本文所需要的几个基本概念 [153,154,161].

q- 形式的微分算子可定义为

$$\partial_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{x(q-1)}, \tag{5.121}$$

当 q 趋于 1 时, (5.121) 化为普通的微分 $\partial f(x)$, 同时, 也使用 q- 形变算子

$$\theta(f(x)) = f(qx), \tag{5.122}$$

以及它的幂次

$$\theta^k(f(x)) = f(q^k x), \quad k \in Z.$$

容易看到 θ 和 ∂_q 不可交换但满足

$$\partial_q \theta^k(f) = q^k \theta^k(\partial_q f), \quad k \in Z.$$

根据定义 (5.121) 和 (5.122), 可以证明 q- 形式 Leibnitz 法则

$$\partial_q(fg) = (\partial_q f)g + \theta(f)\partial_q g,$$

∂_q 的形式逆由下式给出

$$\partial_q^{-1} f = \sum (-1)^k q^{-k(k+1)/2} \theta^{-k-1}(\partial_q^k f)\partial_q^{-k-1}.$$

N 阶 q-KdV 方程族定义如下

$$L_t = [B_n, L], \quad n = 1, 3, \cdots \tag{5.123}$$

它的 Lax 对为

$$L\phi = \lambda\phi, \quad \phi_t = B_n\phi, \tag{5.124}$$

其中

$$L = \partial_q^N + u_{N-1}\partial_q^{N-1} + \cdots + u_1\partial_q + \tilde{u}, \quad B_n = L_+^{n/2}.$$

考虑线性系统

$$\partial_q\psi = U\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - \tilde{u} & -u_1 \end{pmatrix} \psi, \tag{5.125}$$

$$\psi_t = V\psi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \psi, \tag{5.126}$$

其中 $\psi = (\psi_1, \psi_2)^{\mathrm{T}}$, u_0, u_1 为两个位势，λ 为参数，A, B, C 和 D 为 λ 和 λ^{-1} 的多项式. 由 (5.125) 和 (5.126) 的构造，可以看出这是二阶 q-KdV 方程族 (5.124) 的推广，由 (5.125) 和 (5.126) 决定的非线性方程其系数依赖于时间 t.

注释 5.5.1 当 $u_1 = 0, q \to 1$ 时 (6.125) 化为 KdV 方程族的谱问题，应当指出：当用 ∂ 代替 ∂_q 时，谱问题 (5.125) 化为 KdV 方程族的谱问题

$$\tilde{\psi}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - w & 0 \end{pmatrix} \tilde{\psi},$$

其中 $\tilde{\psi} = \psi \exp\left(\frac{1}{2}\int u_1 \mathrm{d}x\right)$, $w = u_0 - \frac{1}{2}u_{1x} - \frac{1}{4}u_1^2$. 然而似乎没有一种简单的方法将 (5.125) 化为上述 q- 形变的微分算子 ∂_q.

下面推导联系谱问题 (5.125)~(5.126) 的方程族，(5.125) 与 (5.126) 之间的相容性条件给出 q 形式的零曲率方程

$$U_t - \partial_q V + UV - \theta(V)U = 0,$$

其等价于

$$-\partial_q A + C - (\lambda - u_0)\theta(B) = 0, \tag{5.127}$$

$$-\partial_q B + D - \theta(A) + u_1\theta(B) = 0, \tag{5.128}$$

$$-u_{0t} - \partial_q C + (\lambda - u_0)(A - \theta(D)) - u_1 C = 0, \tag{5.129}$$

$$-u_{1t} - \partial_q D + (\lambda - u_0)B - \theta(C) - u_1(D - \theta(D)) = 0. \tag{5.130}$$

假设

$$A = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^{n-j}, \quad B = \sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^{n-j},$$

则由 (5.127)~(5.130), 得到递推关系

$$\begin{aligned}
&a_0 = k_0(t), \quad b_0 = 0,\\
&b_1 = m_1(t), \quad a_1 = m_1(t) f + k_1(t), \quad f = (1+\theta)^{-1} u_1.\\
&b_2 = m_1(t)(1+\theta)^{-1}(u_0 - \partial_q f) + m_2(t),\\
&a_2 = m_2(t) f - m_1(t)(1+\theta)^{-1}\partial_q(1+\theta)^{-1}(u_0 - \partial_q f) + m_1(t) f \partial_q f + k_2(t).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{j+1} = {}& (1-\theta^2)^{-1}\{[\partial_q\theta + u_1\theta + \theta\partial_q - u_1\theta^2]a_j + [\partial_q^2 - (\partial_q u_1)\theta\\
&-\theta(u_1)\partial_q\theta + u_0 + u_1\partial_q - u_1^2\theta - \theta(u_0)\theta^2 - u_1\theta\partial_q + u_1\theta(u_1)\theta^2]b_j\}\\
&+m_{j+1}, \quad (0 \le j \le n-1)
\end{aligned} \tag{5.131}$$

$$\begin{aligned}
a_{j+1} = {}& (1-\theta^2)^{-1}\{[\partial_q\theta + u_1\theta + \theta\partial_q - \theta(u_1)\theta^2]b_{j+1} + [\partial_q^2 + u_0\\
&+u_1\partial_q - u_0\theta^2]a_j - [(\partial_q u_0)\theta + \theta(u_0)\partial_q\theta + u_0 u_1\theta + u_0\theta\partial_q\\
&-u_0\theta(u_1)\theta^2]b_j\} + k_{j+1}(t), \quad (0 \le j \le n-1)
\end{aligned} \tag{5.132}$$

$$C = \sum_{j=0}^{n} [\partial_q a_j - u_0\theta(b_j) + \lambda\theta(b_j)]\lambda^{n-j}, \tag{5.133}$$

$$D = \sum_{j=0}^{n} [\partial_q b_j + \theta(a_j) - u_1\theta(b_j)]\lambda^{n-j}. \tag{5.134}$$

广义 q-KdV 方程族为

$$\begin{aligned}
u_{0t} = {}& (-\partial_q^2 - u_0 - u_1\partial_q + u_0\theta^2)a_n + [(\partial_q u_0)\theta + \theta(u_0)\partial_q\theta + u_0 u_1\theta\\
&+u_0\theta\partial_q - u_0\theta(u_1)\theta^2]b_n,
\end{aligned} \tag{5.135}$$

$$\begin{aligned} u_{1t} = & (-\partial_q\theta - u_1\theta - \theta\partial_q + u_1\theta^2)a_n + [-\partial_q^2 + (\partial_q u_1)\theta + \theta(u_1)\partial_q\theta \\ & -u_0 - u_1\partial_q + u_1^2\theta + \theta(u_0)\theta^2 + u_1\theta\partial_q - u_1\theta(u_1)\theta^2]b_n. \end{aligned} \tag{5.136}$$

由 (5.131) 和 (5.132), 看到 a_j 和 b_j 为 u_0, u_1 以及它们 q- 形式微分, θ- 转换算子的多项式, 可通过递推关系逐次得到. 此外它们线性依赖于函数 $k_j(t)$, $m_{j+1}(t)$ $(0 \le j \le n)$. 用 $b_j = b_j[u_0, u_1, m_1, \cdots, m_j]$, 表示 b_j, 且 $b_j^{(0)}[u_0, u_1] = b_j[u_0, u_1, 1, 0, \cdots, 0]$, 其中

$$b_1^{(0)}[u_0, u_1] = 1, \quad b_j^{(0)}[0, 0] = 0 \quad (j \ne 1). \tag{5.137}$$

则 b_j 可写为

$$b_0 = 0, \quad b_j = \sum_{l=1}^{j} m_l(t) b_{j+1-l}^{(0)}[u_0, u_1], \quad j \ge 1. \tag{5.138}$$

由表达式 (5.132), 我们发现 a_j 依赖于 $m_i(t)$ $(1 \le i \le j)$ 和 $k_j(t)$, 但不依赖于 $k_i(t)$ $(0 \le i \le j-1)$. 即 $a_j = a_j[u_0, u_1, m_1, \cdots, m_j, k_j]$. 而且方程族 (5.135) 和 (5.136) 不依赖于 $k_j(t)$ $(0 \le j \le n)$, 因此, 不失一般性下面我们假设 $k_j(t) = 0$, 这样 a_j 的一般表达式可写为

$$a_0 = 0, \quad a_j = \sum_{l=1}^{j} m_l(t) a_{j+1-l}^{(0)}[u_0, u_1], \quad j \ge 1,$$

其中

$$a_j^{(0)}[u_0, u_1] = a_j[u_0, u_1, 1, 0, \cdots, 0], \quad a_j^{(0)}[0, 0] \equiv 0.$$

广义 q-KdV 方程族 (5.135),(5.136) 的前两个方程为:

对 $n = 1$, 得到广义 q-KdV 方程族 (5.135),(5.136) 的 t_1- 流

$$u_{0t} = m_1(t)(\partial_q u_0 - \partial_q^2 f - \partial_q f^2), \quad u_{1t} = x(q-1)\partial_t u_0.$$

对 $n = 2$, 得到广义 q-KdV 方程族 (5.135)~(5.136) 的 t_2- 流

$$\begin{aligned} u_{0t} = & m_2(t)(-\partial_q^2 f - u_1\partial_q f + \partial_q u_0) + m_1(t)(-\partial_q^2 - u_0 - u_1\partial_q + u_0\theta^2) f\partial_q f \\ & + m_1(t)[(\partial_q^2 + u_1\partial_q)(1+\theta)^{-1}\partial_q + (\partial_q u_0)\theta - \theta(u_0)\partial_q\theta + u_0u_1 + u_0\partial_q \\ & - u_0\theta(u_1)\theta^2](1+\theta)^{-1}(u_0 - \partial_q f), \\ u_{1t} = & m_2(t)[(1-\theta)\partial_q f + u_1(1-\theta)f - (1-\theta)u_0] - m_1(t)(\partial_q\theta - \theta\partial_q + u_1\theta \\ & - u_1\theta^2) f\partial_q f + m_1(t)[(\theta\partial_q - \partial_q + u_1\theta - u_1)(1+\theta)^{-1}\partial_q + (\partial_q u_1)\theta + \theta(u_1)\partial_q\theta \\ & - u_0 + u_1^2\theta + \theta(u_0)\theta^2 - u_1\theta(u_1)\theta^2](1+\theta)^{-1}(u_0 - \partial_q f). \end{aligned}$$

当 $u_1=0,q$ 趋于 1 时，上述方程化为变系数的广义 KdV 方程

$$u_{0t}=\frac{1}{4}m_1(t)(u_{0xxx}+2u_0u_{0x})+m_2(t)u_{0x}.$$

注释 5.5.2 与经典的 q-KdV 方程族 (5.123) 相比，广义 q-KdV 方程族 (5.135), (5.136) 有如下优点：首先，对任何 $n\in Z_+$ 都有定义，但经典的 q-KdV 方程族 (5.123) 由于要求 $[L,L^k]=0$，对偶数 $n=2k$ 是平凡的. 其次，广义 q-KdV 方程族 (5.135), (5.136) 的系数明显地依赖于时间 t 的任意函数 $m_j(t)$ $(j=1,2,\cdots,n)$. 最后，广义 q-KdV 方程族 (5.135), (5.136) 对 q-KdV 方程族描述比经典的 q-KdV 方程族 (5.123) 更清楚.

§5.5.2 广义 q-KdV 方程族的统一的 Darboux 变换

这一部分，我们构造广义 q-KdV 方程族 (5.135), (5.136) 的 Darboux 变换，考虑 Lax 对 (5.125) 和 (5.126) 的规范变换

$$\tilde{\psi}=S\psi. \tag{5.139}$$

要求 $\tilde{\psi}$ 满足 (5.125) 和 (5.126), 即

$$\partial_q\tilde{\psi}=\tilde{U}\tilde{\psi},\quad \tilde{U}=(\partial_qS+\theta(S)U)S^{-1}. \tag{5.140}$$

$$\tilde{\psi}_t=\tilde{V}\tilde{\psi},\quad \tilde{V}=(S_t+SV)S^{-1}. \tag{5.141}$$

交叉微分 (5.140) 和 (5.141) 得到

$$\tilde{U}_t-\partial_q\tilde{V}+\tilde{U}\tilde{V}-\theta(\tilde{V})\tilde{U}=S(U_t-\partial_qV+UV-\theta(V)U)S^{-1}.$$

这表明要使得系统 (5.136) 和 (5.137) 在规范变换 (5.139) 不变，我们要求 $\tilde{U}$ 和 $\tilde{V}$ 与 U 和 V 有相同的形式，其中 U,V 中旧的位势 u_0, u_1 被映为 $\tilde{U},\tilde{V}$ 中新的位势 $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$. 通常 S 称为 Lax 对 (5.125) 和 (5.126) 的 Darboux 变换，而 $\{\psi,u_0,u_1\}\to\{\tilde{\psi},\tilde{u}_0,\tilde{u}_1\}$. 按照文献 [2,123] 的技巧，我们给出 S 一种显式构造如下：

假设 $\psi=(\psi_1(\lambda),\psi_2(\lambda))^{\mathrm{T}}$ 为 (5.94)~(5.95) 的非平凡解，令

$$\sigma_0=\sigma_0(\lambda_0)=\frac{\psi_2(\lambda_0)}{\psi_1(\lambda_0)}(\lambda_0\neq 0) \tag{5.142}$$

并且

$$S=\begin{pmatrix}-\sigma_0 & 1\\ \lambda-\lambda_0+\sigma_0(u_1+\theta(\sigma_0)) & -(u_1+\theta(\sigma_0))\end{pmatrix}, \tag{5.143}$$

则有如下定理

定理 5.5.3 在规范变换 (5.139) 和 (5.140) 下，(5.140) 中的 $\tilde{U}$ 与 U 具有相同的形式，即

$$\tilde{U}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \lambda-\tilde{u}_0 & -\tilde{u}_1\end{pmatrix}, \tag{5.144}$$

其中

$$\tilde{u}_0=u_0+\partial_q(u_1+\sigma_0+\theta(\sigma_0)), \tag{5.145}$$

$$\tilde{u}_1=u_1+x(q-1)(\tilde{u}_0-u_0). \tag{5.146}$$

证明 由 (5.124) 和 (5.125), 看到

$$\partial_q\sigma_0=\lambda_0-u_0-\sigma_0(u_1+\theta(\sigma_0)). \tag{5.147}$$

利用 (5.145) 和 (5.147), 直接计算得到 $\tilde{U}=(\partial_q S+\theta(S)U)S^{-1}$ 具有形式 (5.144), 其中 $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$ 由 (5.145), (5.146) 给出.

定理 5.5.4 在 Darboux 变换 (5.139) 和 (5.143) 下，(5.141) 中的 $\tilde{V}$ 与 V 具有相同的形式.

证明 记

$$V|_{\lambda=\lambda_0}=\begin{pmatrix}A_0 & B_0\\ C_0 & D_0\end{pmatrix},\quad \tilde{V}=\begin{pmatrix}\tilde{A} & \tilde{B}\\ \tilde{C} & \tilde{D}\end{pmatrix}. \tag{5.148}$$

利用关系 (5.131)~ (5.134) 以及上一节的讨论，我们只需证明 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 与 A 和 B 有相同的形式. 由 (5.126) 和 (5.132), 我们得到

$$\sigma_{0t}=C_0+(D_0-A_0)\sigma_0-B_0\sigma_0^2. \tag{5.149}$$

则利用 (5.141), (5.148) 和 (5.149), 我们发现

$$(\lambda-\lambda_0)\tilde{B}=\sigma_0^2(B_0-B)+\sigma_0(A_0-A)+\sigma_0(D-D_0)+(C-C_0). \tag{5.150}$$

其中

$$A-A_0=-\sum_{j=0}^{n-1}a_j(\lambda_0^{n-j}-\lambda^{n-j}),\quad B-B_0=-\sum_{j=0}^{n-1}b_j(\lambda_0^{n-j}-\lambda^{n-j}), \tag{5.151}$$

$$D_0-D=\sum_{j=0}^{n-1}(\partial_q b_j+\theta(a_j)-u_0\theta(b_j))(\lambda_0^{n-j}-\lambda^{n-j}), \tag{5.152}$$

$$\begin{aligned}C_0-C=&\sum_{j=0}^{n-1}(\partial_q a_j-u_0\theta(b_j))(\lambda_0^{n-j}-\lambda^{n-j})\\&+\sum_{j=0}^{n-1}\theta(b_j)(\lambda_0^{n+1-j}-\lambda^{n+1-j})+\theta(b_n)(\lambda_0-\lambda).\end{aligned} \tag{5.153}$$

因此 $\tilde{B}$ 为 λ 的多项式. 另一方面, 从 (5.144), (5.148) 出发及广义 q-KdV 方程族的产生过程, 知道 $\tilde{u}_0$ 和 $\tilde{u}_1$ 为广义 q-KdV 方程族的解, 这里

$$\tilde{B}=\sum_{j=0}^{n}\tilde{b}_j\lambda^{n-j}=b_j[\tilde{u}_0,\tilde{u}_1,\tilde{m}_1,\cdots,\tilde{m}_j]\lambda^{n-j}.$$

剩下要证明

$$\Delta_j=\tilde{b}_j-b_j[\tilde{u}_0,\tilde{u}_1,m_1,\cdots,m_j]=0. \tag{5.154}$$

由 (5.107), 知道只需对特殊的情况 $m_1=1,m_2=\cdots=m_n=0$ 证明 (5.154), 即

$$\Delta_j=\tilde{b}_j^{(0)}[\tilde{u}_0,\tilde{u}_1]-b_j^{(0)}[\tilde{u}_0,\tilde{u}_1]=0. \tag{5.155}$$

为简化表达式 (5.150), 做变换 s $\lambda-\lambda_0\to\lambda$, $u_0-\lambda_0\to u_0$, $\tilde{u}_0-\lambda_0\to\tilde{u}_0$. 将 (5.151)~ (5.155) 代入 (5.150) 给出

$$\tilde{b}_0=\theta(b_0)=0,$$

$$\begin{aligned}\tilde{b}_{j+1}=\sigma_0^2b_j+\sigma_0(a_j+\partial_qb_j+\theta(a_j)-u_0\theta(b_j))+\partial_qa_j\\-u_0\theta(b_j)+\theta(b_{j+1}),\quad(0\le j\le n-1).\end{aligned} \tag{5.156}$$

容易验证 (5.155) 对 $j=0,1$ 成立. 假设 (5.124) 对 $j\le k$ 成立, b_{k+1} 利用 (5.155) 而对 $\tilde{b}_{k+1}$ 利用 (5.156), 通过冗长的计算, 我们有

$$(1-\theta^2)\Delta_{k+1}=0.$$

因此 Δ_{k+1} 为一常数. 令 $u_0=u_1=\sigma_0=0$, 并利用 (5.155), (5.145), (5.146), 得到 $\Delta_{k+1}=0$. 于是 (5.155) 成立. 用类似的方法, 也可证明 $\tilde{A}$ 与 A 具有相同的形式.

§5.5.3　Darboux 变换的可换定理和叠加公式

考虑 Darboux 变换的如下两种变换过程

$$\{u_0,u_1,\psi\}\xrightarrow{S_1}\{u_0^{(1)},u_1^{(1)},S_1\psi\}\xrightarrow{S_2}\{u_0^{(12)},u_1^{(12)},S_2S_1\psi\},$$

$$\{u_0,u_1,\psi\}\xrightarrow{S_2'}\{u_0^{(2)},u_1^{(2)},S_2'\psi\}\xrightarrow{S_1'}\{u_0^{(21)},u_1^{(21)},S_1'S_2'\psi\},$$

其中 S_j 和 S_j' 具有相同的参数 λ_j $(j=1,2)$. 则有

定理 5.5.5　*由 (5.139), (5.143), (5.145) 和 (5.146) 的 Darboux 变换 $\{\psi,u_0,u_1\}\to\{\tilde{\psi},\tilde{u}_0,\tilde{u}_1\}$ 具有如下可换定理和叠加公式*

$$S_2S_1=S_1'S_2', \tag{5.157}$$

$$u_0^{(12)} = u_0^{(21)} = u_0 + \partial_q(1+\theta)\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\sigma_1-\sigma_2'}\right), \tag{5.158}$$

$$u_1^{(12)} = u_1^{(21)} = u_1 + x(q-1)(u_0^{(12)} - u_0). \tag{5.159}$$

证明 利用定义，有

$$S_1 = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & 1 \\ \lambda-\lambda_1+\sigma_1(u_1+\theta(\sigma_1)) & -(u_1+\theta(\sigma_1)) \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \frac{\psi_2(\lambda_1)}{\psi_1(\lambda_1)},$$

因此

$$\tilde{\psi} = S_1\psi = \begin{pmatrix} -\sigma_1\psi_1+\psi_2 \\ (\lambda-\lambda_1)\psi_1-(u_1+\theta(\sigma_1))(-\sigma_1\psi_1+\psi_2) \end{pmatrix}.$$

由此，进一步构造 Darboux 阵

$$S_2 = \begin{pmatrix} -\sigma_2 & 1 \\ \lambda-\lambda_2+\sigma_2(u_1^{(1)}+\theta(\sigma_2)) & -(u_1^{(1)}+\theta(\sigma_2)) \end{pmatrix},$$

其中

$$\sigma_2 = -(u_1+\theta(\sigma_1)) + \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\sigma_1-\sigma_2'}, \qquad \sigma_2' = \frac{\psi_2(\lambda_2)}{\psi_1(\lambda_2)}. \tag{5.160}$$

类似地，有

$$S_2' = \begin{pmatrix} -\sigma_2' & 1 \\ \lambda-\lambda_2+\sigma_2'(u_1+\theta(\sigma_2')) & -(u_1+\theta(\sigma_2')) \end{pmatrix}$$

以及

$$S_1' = \begin{pmatrix} -\sigma_1' & 1 \\ \lambda-\lambda_1+\sigma_1'(u_1^{(2)}+\theta(\sigma_1')) & -(u_1^{(2)}+\theta(\sigma_1')) \end{pmatrix},$$

其中

$$\sigma_1' = -(u_1+\theta(\sigma_2')) + \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\sigma_1-\sigma_2'}. \tag{5.161}$$

通过直接计算，我们看到 $S_2S_1 = S_1'S_2'$ 的充分必要条件为

$$\sigma_2+\theta(\sigma_1)+u_1 = \sigma_1'+\theta(\sigma_2')+u_1, \tag{5.162}$$

$$\sigma_1(\sigma_2+\theta(\sigma_1)+u_1)-\lambda_1 = \sigma_2'(\sigma_1'+\theta(\sigma_2')+u_1)-\lambda_2, \tag{5.163}$$

$$\theta(\sigma_2+\theta(\sigma_1)+u_1)(\sigma_2+\theta(\sigma_1)+u_1) = \theta(\sigma_1'+\theta(\sigma_2')+u_1)(\sigma_1'+\theta(\sigma_2')+u_1), \tag{5.164}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_1\lambda_2+[\sigma_1-\theta(\sigma_2+\theta(\sigma_1)+u_1)][-\lambda_1+\sigma_1(\sigma_2+\theta(\sigma_1)+u_1)] \\ &\quad = \sigma_2'\lambda_1+[\sigma_2-\theta(\sigma_1'+\theta(\sigma_2')+u_1)][-\lambda_2+\sigma_2'(\sigma_1'+\theta(\sigma_2')+u_1)], \end{aligned} \tag{5.165}$$

既然 (5.133) 和 (5.134) 为 (5.162) 和 (6.132) 推论，而 (5.131) 和 (5.132) 等价于公式 (5.160) 和 (5.161), 因此 (5.157) 自然成立. 连续利用 (5.155) 二次并注意到 (5.160), 立即获得简单而显式的 Darboux 变换叠加公式 (5.158) 和 (5.159).

§5.5.4 常速和变速的孤子解

在这部分，应用 Darboux 变换用统一的方式构造整个广义 q-KdV 方程族的孤子解. 由 $u_0 = u_1 = 0$ 出发，得到 Lax 对 (5.123) 和 (5.126) 的解

$$\psi = (H_1(\lambda), \partial_q H_1(\lambda))^{\mathrm{T}},$$

其中

$$H_1(\lambda) = E_q(\sqrt{\lambda}x)\exp(b(t,\lambda) + E_q(-\sqrt{\lambda}x)\exp(-b(t,\lambda),$$

$$b(t,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \lambda^{n-j+1/2} \int m_j(t)dt,$$

而 $E_q(x)$ 表示如下 q- 指数函数

$$E_q(x) = \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-q)^k}{k(1-q^k)} x^k\right],$$

它满足 $\partial_q E_q(px) = pE_q(px)$.

令 $\lambda = \lambda_0$, 根据 (6.124) 取

$$\sigma_0 = \sigma(\lambda_0) = \frac{\partial_q H_1(\lambda_0)}{H_1(\lambda_0)}. \tag{5.166}$$

将 (5.166) 代入 (5.145) 和 (5.146), 给出广义 q-KdV 族的单孤子解

$$\tilde{u}_0 = 4\lambda_0 \frac{\theta^2(H_1(\lambda_0)) + qH_1(\lambda_0)}{H_1(\lambda_0)\theta(H_1(\lambda_0))\theta^2(H_1(\lambda_0))}, \quad \tilde{u}_1 = x(q-1)\tilde{u}_0. \tag{5.167}$$

进一步，如果 (5.167) 作为新的起点，可再次使用 Darboux 变换 (5.145), (5.146) 并产生新的解，这种过程通常可连续进行下去用来产生广义 q-KdV 族的多孤子解，但利用叠加公式 (5.158) 和 (5.159) 更为方便. 由于

$$\psi = \left(\frac{1}{\lambda}\partial_q H_1(\lambda), H_1(\lambda)\right)^{\mathrm{T}}$$

为 Lax 对 (5.125) 和 (5.126) 另一解 ($u_0 = u_1 = 0$), 可选取

$$\sigma_1' = \sigma'(\lambda_1) = \frac{\lambda_1 H_1(\lambda_1)}{\partial_q H_1(\lambda_1)}.$$

这样，叠加公式 (5.158) 和 (5.159) 给出广义 q-KdV 族的双孤子解

$$u_0^{(01)} = (\lambda_0 - \lambda_1)(1+q\theta)\partial_q\left(\frac{H_1(\lambda_0)\partial_q H_1(\lambda_1)}{\partial_q H_1(\lambda_0)\partial_q H_1(\lambda_1) - \lambda_1 H_1(\lambda_0)H_1(\lambda_1)}\right), \tag{5.168}$$

$$u_1^{(01)} = x(q-1)u_0^{(01)}. \tag{5.169}$$

最后，我们给出 $n=2$ 情形广义 q-KdV 族孤子解的图形，由于 $u_1(x,t)$ 与 $u_0(x,t)$ 有相同的结构，仅画出 $u_0(x,t)$ 的 $q=3/4$ 情形的图形. 在图 5.5.1, 我们选取 $b(t,\lambda)=\lambda^{3/2}t$ 作了单、双孤子图形，这些解具有常系数 q-KdV 方程族的性质. 在图 5.5.2, 我们选取 $b(t,\lambda)=\lambda^{3/2}\cos(t)$, 这些解具有变系数 q-KdV 方程的性质.

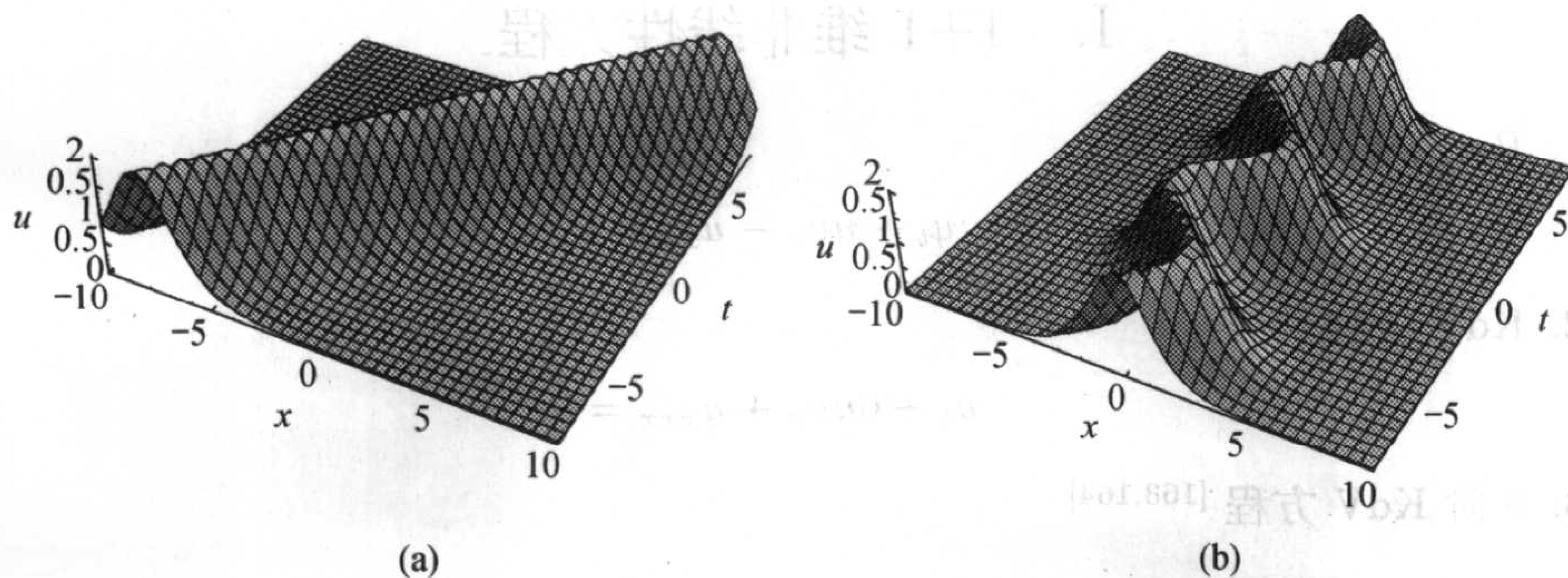


图 5.5.1 单孤子解 (5.168) 选取 $q=0.75, \lambda_0=0.5$

(a) $m_1=0, m_2=1$, (b) $m_1=0, m_2=-\sin(t)$

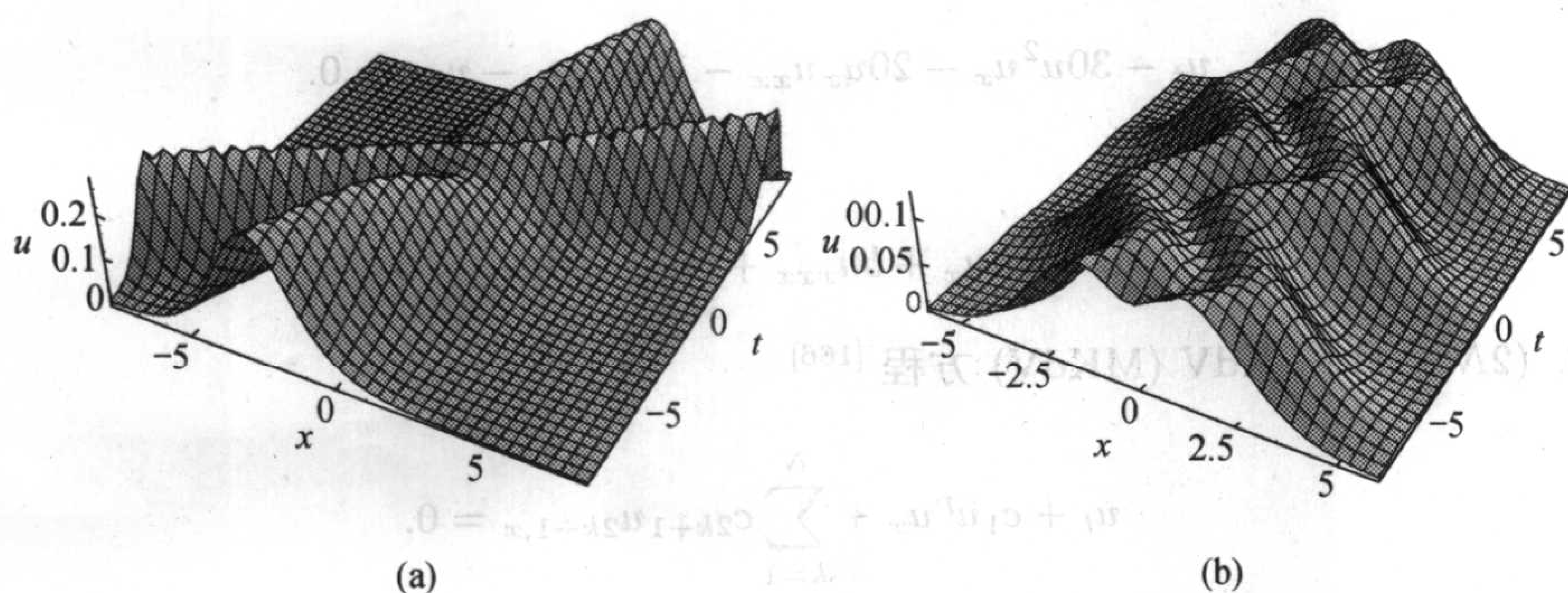


图 5.5.2 双孤子解 (5.169) 选取 $q=0.75, \lambda_0=0.2, \lambda_1=0.5$

(a) $m_1=0, m_2=1$, (b) $m_1=0, m_2=-\sin(t)$

注释 5.5.6 这一节，通过引入矩阵形式的 Lax 对，我们推导了一新的广义 q-KdV 方程族，Darboux 变换，可换定理，叠加公式和孤子解. 我们看到，当 $u_1=0$, q 趋于 1 时所有这些结果约化为 KdV 方程族的相应结果 [153]. 但与 KdV 方程族相比，广义 q-KdV 方程族中仍有许多问题尚未解决，而且广义 q-KdV 方程族的研究有助于我们对 q-KdV 方程族自身可积性的了解.

附录　数学物理中的非线性方程

我们提供 200 余个重要数学物理方程，为缩短篇幅，仅列出部分关键参考文献，以备有兴趣的读者查找更多的信息.

I. 1+1 维非线性方程

1. Burgers 方程 [1,2,61]

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0.$$

2. KdV 方程 [1,2,61]

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

3. 5 阶 KdV 方程 [163,164]

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} + \gamma u_{5x} = 0.$$

4. 守恒律形式的 5 阶 KdV 方程 [67]

$$u_t - 30u^2u_x - 20u_xu_{xx} - 10uu_{xxx} - u_{5x} = 0.$$

5. 7 阶方程 [165]

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} + cu_{5x} + du_{7x} = 0.$$

6. $(2N+1)$ 阶 KdV (MKdV) 方程 [166]

$$u_t + c_1u^pu_x + \sum_{k=1}^{N} c_{2k+1}u_{2k+1,x} = 0.$$

7. 广义 KdV 方程 [371]

$$u_t + (\alpha + \beta u^r)u^ru_x + \delta u_{xxx} = 0$$

8. MKdV 方程 [1,2]

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0.$$

9. 组合 KdV-MKdV 方程 [167]

$$u_t + (\alpha + \beta u)uu_x + \gamma u_{xxx} = 0.$$

10. KdV-Burgers 方程 [168]

$$u_t + uu_x - \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0.$$

11. MKdV-Burgers 方程 [121]

$$u_t + u^2 u_x - \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0.$$

12. KdV-Burgers-Kuramoto 方程 [104,105]

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + \gamma u_{xxxx} = 0.$$

13. BBM equaton[169]

$$u_t + u_x + uu_x + \alpha u_{xxt} = 0.$$

14. 修正的 BBM 方程 [170]

$$u_t + u_x + u^2 u_x + \alpha u_{xxt} = 0.$$

15. BBM-Burgers 方程 [171]

$$u_t + u_x + uu_x - \alpha u_{xx} - \beta u_{xxt} = 0.$$

16. Sharma-Tasso-Olever 方程 [64,132]

$$u_t + 3\alpha u_x^2 + 3\alpha u^2 u_x + 3\alpha uu_{xx} + \alpha u_{xxx} = 0.$$

17. 广义 Sharma-Tasso-Olver 方程 [64]

$$u_t + \alpha u^p u_x + \beta u^q u_x^2 + \gamma u^r u_{xx} + \delta u_{xxx} = 0.$$

18. 对称正则长波方程 [172]

$$u_{tt} + \alpha u_{xx} + \beta (u^2)_{xt} + \gamma u_{xxtt} = 0.$$

19. Benjamin Ono 方程 [173]

$$u_{tt} + \beta (u^2)_{xx} + \gamma u_{4x} = 0.$$

20. Kuramoto-Sivashinsky 方程 [104~107]

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xx} - \beta u_{4x} = 0.$$

21. 5 阶色散方程 [54]

$$u_t + \alpha u_x u_{xx} + \gamma u_{5x} = 0.$$

22. Kawachara 方程 [174]

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xxx} + \beta u_{5x} = 0.$$

23. 修正的 Kawachara 方程 [174]

$$u_t + u_x + u^2 u_x + \alpha u_{3x} + \beta u_{5x} = 0.$$

24. Hirota 方程 [175]

$$u_t - u_{xxt} + \alpha u_x (1 - u_t) = 0.$$

25. Hirota 方程 [355]

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u + 6i\alpha |u|^2 u_x + i\alpha u_{xxx} = 0.$$

26. Fisher 方程 [177]

$$u_t - u_{xx} = u(1 - u).$$

27. 广义 Fisher 方程 [177]

$$u_t - u_{xx} - \alpha u^{-1} (u_x)^2 = u(1 - u^c).$$

28. 广义 Burgers-Fisher 方程 [178]

$$u_t - u_{xx} - \alpha u^c u_x = \beta u(1 - u^c).$$

29. Huxley 方程 [179]

$$u_t - u_{xx} = u^2 (1 - u).$$

30. Burgers-Huxley 方程 [177]

$$u_t + \alpha u u_x - u_{xx} = \beta u(1 - u)(u - \gamma).$$

31. 广义 Burgers-Huxley 方程 [177]

$$u_t + \alpha u^c u_x - u_{xx} = \beta u(1 - u^c)(u^c - \gamma).$$

32. Chaffee-Infante 方程 [180]

$$u_t - u_{xx} = \alpha u(1 - u^2).$$

33. Bretherton 方程 [176]

$$u_{tt} + u_{xx} + \alpha u_{4x} - \beta u^3 = 0.$$

34. 广义 KPP 方程 [181]

$$u_t - u_{xx} + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 = 0.$$

35. Newell-Whitehead 方程 [181]

$$u_t - u_{xx} = u - u^3.$$

36. Fitzhugh-Nagumo 方程 [181]

$$u_t - u_{xx} = u(u - \alpha)(1 - u).$$

37. 非线性热传导方程 [182]

$$u_t - (u^2)_{xx} = \alpha u - \beta u^2.$$

38. 反应扩散方程 [202,203]

$$u_t = (u^2)_{xx} + u(u - 1)(\alpha - u).$$

39. Boussinesq 方程 [42]

$$u_{tt} + \alpha u_{xx} + \beta (u^2)_{xx} + \gamma u_{4x} = 0.$$

40. 修正的 Boussinesq 方程 [202]

$$u_{tt} + \alpha u_t u_{xx} + \beta u_x u_{xt} - \frac{1}{2}\alpha(\alpha + \beta) u_x^2 u_{xx} + u_{xxxx} = 0.$$

41. Klein-Gordon 方程 [183]

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u + \beta u^3 = 0.$$

42. Landou-Ginburg-Higgss 方程 [183]

$$u_{tt} - u_{xx} - m^2 u + g^2 u^3 = 0.$$

43. 非线性电报方程 [184]

$$u_{tt} - u_{xx} + u_t + \alpha u + \beta u^3 = 0.$$

44. Sine-Gordon 方程 [1,2]

$$u_{xt} = \sin u.$$

45. 双 Sine-Gordon 方程 [224]

$$u_{xt} = \sin(u) + \sin(2u).$$

46. 耗散 Sine-Gordon 方程 [370]

$$c^2 u_{xx} - u_{tt} - \gamma u_t = \alpha_1 \sin u + \alpha_2 \sin(2u).$$

47. Sinh-Gordon 方程 [242]

$$u_{xt} = \sinh u.$$

48. Liouville 方程 [245]

$$u_{xt} = e^u.$$

49. Dodd-Bullough-Mikhailov 方程 [245]

$$u_{xt} + pe^u + qe^{-2u} = 0.$$

50. Zhiber-Shabaut 方程 [371]

$$u_{xt} + pe^u + qe^{-u} + re^{-2u} = 0, p \neq 0.$$

51. 色散耗散方程 [185]

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xxx} - (u_t + \beta uu_x)_x = 0.$$

52. RLW-Burgers 方程 [171]

$$u_t + u_x + 12uu_x - \alpha u_{xx} - \beta u_{xxt} = 0.$$

53. 非线性 Schrödinger 方程 [1,2]

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0.$$

54. Kaup-Newell 方程 [19,123]

$$iu_t + u_{xx} + i(|u|^2 u)_x = 0.$$

55. Chen-Lee-Liu 方程 [124,125]

$$iu_t + u_{xx} + i|u|^2 u_x = 0.$$

56. Gerdjikov-Ivanov 方程 [126,127]

$$iu_t + u_{xx} - iu^2u_x^* + \frac{1}{2}|u|^4u^* = 0.$$

57. Kundu 方程 [128,130]

$$iu_t - u_{xx} - 2i(2\alpha - 1)|u|^2u_x - i(4\alpha - 1)u^2u_x^* + \alpha(4\alpha - 1)|u|^4u = 0.$$

58. 广义导数 Schrödinger 方程 [42,186]

$$iu_t - u_{xx} + i\alpha|u|^2u_x + i\beta u^2u_x^* + \gamma|u|^4u = 0.$$

59. 混合型 Schrödinger 方程 [42]

$$iu_t - u_{xx} + i\beta(u^2u^*)_x + \gamma u^2u^* = 0.$$

60. 广义混合型 Schrödinger 方程 [42]

$$iu_t - u_{xx} + i\alpha|u|^2u_x + i\beta u^2u_x^* + \gamma|u|^4u + \delta|u|^2u = 0.$$

61. 5 阶 Schrödinger 方程 [188]

$$iu_t + \frac{1}{2}\alpha u_{xxxx} + \frac{1}{2}\beta u_{xx} + |u|^{2\gamma}u = 0.$$

62. 柱立方 Schrödinger 方程 [204]

$$iu_t + u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} + \alpha u|u|^4 + \beta u|u|^2 = 0.$$

63. 广义柱 Schrödinger 方程 [204]

$$iu_t+u_{\rho\rho}+\rho^{-1}u_\rho-k^2\rho^{-2}u+(\alpha_1+i\alpha_2)(|u|^2u)_\rho+(\beta_1+i\beta_2)u(|u|^2)_\rho+\gamma u|u|^4+\delta u|u|^2 = 0.$$

64. 推广的 Schrödinger 方程 [233~235]

$$iq_t - \frac{s}{2}q_{xx} + |q|^2q - i\lambda q_{xxx} + i\mu(|q|^2q)_x + i\nu q(|q|^2)_x = 0.$$

65. 非线性原子格方程 [2,205]

$$u_{xt} + \frac{3}{2}u_x^2u_{xx} + uu_{4x} - \sin u = 0.$$

66. Nepomnyachtchyi 方程 [189]

$$u_t + \alpha u_{xx} + \beta u_{4x} - 2\beta v^{-2}(u^3)_{xx} + \gamma uu_x + \delta u = 0.$$

67. FG 方程 [206]

$$u_t = u_{5x} - \frac{5}{16}(8u_{xx}^2 + 8u_x u_{xxx} + 16uu_x u_{xx} + 4u^3 u_{xxx} + 4u^3 u_x - u^4 u_x).$$

68. Kaup-Kupershmidt 方程 [207,208]

$$u_t = u_{5x} + 25u_x u_{xx} + 10uu_{xxx} + 20u^2 u_x.$$

耗散 $K(m,n)$ 方程 [375]

$$u_t + (u^m)_x + (u^n)_{xxx} = 0, m, n > 1.$$

69. Aceive 耗散色散方程 [188]

$$u_t + uu_x + u_{xx} + \alpha u_{3x} + u_{4x} = 0.$$

70. 复修正的 KdV 方程 [209]

$$u_t + \alpha(|u|^2 u)_x + \beta u_{xxx} = 0.$$

71. Eckhaus 方程 [210,211]

$$iu_t + u_{xx} + 2(|u|^2)_x u + |u|^4 u = 0.$$

72. Poisson 方程 [216]

$$u_{tt} + 2u_x u_{xx} - (1 - u_x^2)u_{xx} = 0.$$

73. Born-Infeld 方程 [217]

$$(1 + u_x^2)u_{tt} - 2u_t u_x u_{xt} - (1 - u_t^2)u_{xx} = 0.$$

74. Monge-Ampére 方程 [220]

$$u_{tt} + u_{xx} - u_{tx}^2 = -k, \quad k = \pm 1, 0.$$

75. Sasa-Satsuma 方程 [221]

$$iq_t + \frac{1}{2}q_{xx} + |q|^2 q + \frac{i}{6\epsilon}(q_{xxx} + 6|q|^2 q_x + 3|q|_x^2 q) = 0.$$

76. Calogero-Degasperis-Fokas 方程 [225]

$$u_t = u_{xxx} - \frac{1}{8}u_x^3 + (ae^u + be^{-u} + c)u_x.$$

77. Fuchssteiner-Fokas-Camassa-Holm[226,227]

$$u_t = 2f_x u + f u_x, \quad u = \frac{1}{2} f_{xx} - 2f.$$

78. Harry-Dym 方程 [232]

$$u_t + u^3 u_{xxx} = 0.$$

79. 浅水波方程 [238,239]

$$u_t - u_{xxt} - 4uu_t - 2u_x \partial_x^{-1} u_t + u_x = 0.$$

80. JM2 or Fordy-Gibbons-Jimbo-Miwa 方程 [240,241]

$$9u_t + (u_{xxx} - 5u^2 u_{xx} - 5u_x u_{xx} - 5uu_x^2 + u^5)_x = 0.$$

81. Joseph-Egri 方程 [54]

$$u_t + u_x + uu_x + \beta u_{xtt} = 0.$$

82. 主手场方程 [259]

$$(U^* U_x)_t + (U^* U_t)_x = 0,$$

其中 $U(x,t)$ 为单位矩阵， $U^* U = I$.

83. Getmanou 方程 [243]

$$u_{xt} + \frac{u_x u_t}{1 - u^2} - u(1 - u^2) = 0.$$

84. Heisenberg 铁磁链方程 [42]

$$iu_t + u_{xx} - \frac{2u^*}{1 + uu^*} u_x^2 = 0.$$

85. Ernst 方程 [246]

$$(uu^* - 1)[u_{\rho\rho} + \frac{1}{\xi} u_\xi + u_{zz}] = 2u^*(u_\rho^2 + u_z^2).$$

86. Fujimoto-Watanabe[245]

$$u_t = u^3 u_{xxx} + 3u^2 u_x u_{xx} + 3\alpha u^2 u_x.$$

87. 非线性双曲变分方程 [247]

$$(u_t + uu_x)_{xx} - \frac{1}{2}(u_x^2)_x = 0.$$

88. 广义 Landan-Lifshitz 方程 [253]

$$S_t + \epsilon S_{xxx} + \frac{3}{2}\epsilon(S_x^3 + SS_xS_{xx}) = 0.$$

89. Caudrey-Dodd-Gibbon-Sawada-Kotera 方程 [254]

$$u_t + u_{5x} + 5(uu_{xxx} + u_xu_{xx} + u^2u_x) = 0.$$

90. Cadrey-Dldd-Gibbon Kaeada 方程 [67]

$$u_t + (u_{xxxx} + 30uu_{xx} + 60u^3)_x = 0.$$

91. Camassa-Holm 方程 [190]

$$u_t + 2\alpha u_x + 3uu_x + u_{xxt} + 2u_xu_{xx} + uu_{xxx} = 0.$$

92. 耦合 KdV 方程 [139]

$$u_t + 6\alpha uu_x - vv_x + \beta u_{xxx} = 0,$$

$$v_t + 3\alpha uv_x + \alpha v_{xxx} = 0.$$

93. Hirota-Satsuma 方程 [101]

$$\begin{aligned} &u_t - 6puu_x + rvv_x - pu_{xxx} = 0,\\ &v_t + 3puv_x + pv_{xxx} = 0. \end{aligned}$$

94. 耦合 Ito 方程 [213]

$$\begin{aligned} &u_t = v_x,\\ &v_t = -2(v_{xxx} + 3uv_x + 3vu_x) - 12ww_x,\\ &w_t = w_{xxx} + 3uw_x. \end{aligned}$$

95. 广义耦合 KdV 方程 [214,215]

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{4}u_{xxx} + 3uu_x + 3(-v^2 + w)_x,\\ v_t &= -\frac{1}{2}v_{xxx} - 3uv_x,\\ w_t &= -\frac{1}{2}w_{xxx} - 3uw_x. \end{aligned}$$

96. 耦合 Schrödinger-Boussinesq 方程 [371]

$$iu_t = u_{xx} + uv,$$
$$v_{tt} - v_{xx} - (v^2)_{xx} - v_{xxxx} + (|u|^2)_x = 0.$$

97. 修正的 Sine-Gordon 方程 [66]

$$q_t + \frac{1}{2}qr + \frac{1}{2}\lambda\frac{q}{r} = 0,$$
$$r_x + \frac{1}{2}qr + \frac{1}{2\lambda}\frac{r}{q} = 0.$$

98. Lund-Regge 方程 [244]

$$u_{xt} + \sin u - \left(\frac{\tan^2 u/2}{\sin u}\right) v_x v_t = 0,$$
$$v_{xt} + (\sin u)^{-1}(u_x v_t + u_t v_x) = 0.$$

99. 耦合 Schrödinger-KdV 方程 [187]

$$iu_t + u_{xx} = uv,$$
$$v_t + \alpha v v_x + \beta v_{xxx} = (|u|^2)_x.$$

100. 长短波共振方程 [218,219]

$$iq_t = q_{xx} + 2uq,$$
$$ir_t = r_{xx} + 2ur,$$
$$u_t = (qr)_x.$$

101. 形变 Boussinesq 方程 1[120]

$$u_t + v_x + uu_x = 0,$$
$$v_t + (uv)_x + u_{xxx} = 0.$$

102. 形变 Boussioesq 方程 2 [120]

$$u_t + v_x + (uv)_x - 3\alpha v_{xxx} = 0,$$
$$v_t + vv_x + u_x - 3\alpha v_{xxt} = 0.$$

103. 形变 Boussinesq 方程 3[191]

$$u_t + v_x + uu_x + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxt} = 0,$$
$$v_t + (uv)_x + 2\alpha v_x + \beta u_{xxx} = 0.$$

104. 长水波方程 [139]

$$u_t - uu_x - v_x + \frac{1}{2}u_{xx} = 0,$$
$$v_t - (uv)_x - \frac{1}{2}v_{xx} = 0.$$

105. Whitham-Broer-Kaup 浅水波方程 [197]

$$u_t + uu_x + v_x + \alpha u_{xx} = 0,$$
$$v_t + (uv)_x - \alpha v_{xx} + \beta v_{xxx} = 0.$$

106. Drinfel'd-Sokolov-Wilson 方程 [192]

$$u_t + vv_x = 0,$$
$$v_t - \alpha uv_x + \beta vu_x + \gamma u_{xxx} = 0.$$

107. Konopelchenko-Dubrovsky 方程 [222,223]

$$u_t - u_{xxx} - 6\beta uu_x + \frac{3}{2}\alpha^2 u^2 u_x - 3w_y + 3\alpha u_x w = 0,$$
$$w_x = u_y.$$

108. 修正的 Volterra 方程 [193]

$$u_t + \alpha u_x - u + uv = 0,$$
$$v_t + \beta v_x + v - uv = 0.$$

109. Belousov-Zhabotinskii 反应扩散方程 [194]

$$u_t - u_{xx} = u(1 - u - \alpha v),$$
$$v_t - v_{xx} = -\beta uv.$$

110. 反应扩散方程 1 [195]

$$u_t - \alpha u_{xx} = uv,$$
$$v_t - \alpha v_x = -uv.$$

111. 反应扩散方程 2[196]

$$u_t - \alpha u_{xx} = u^2 v - \beta u,$$
$$v_t - \alpha v_x = -u^2 v + \beta u.$$

112. 非线性耦合场方程 [198]

$$u_{xx} = -u + u^3 + \alpha v^2 u,$$
$$v_{xx} = (\beta - \alpha)v + \gamma v^3 + \alpha u^2 v.$$

113. Heisenberg 方程 [199]

$$u_t = i(uw_{xx} - wu_{xx}),$$
$$v_t = i(wv_{xx} - vw_{xx}),$$
$$w_t = \frac{i}{2}(vu_{xx} - uv_{xx}).$$

114. 耦合可积无色散方程 [200]

$$u_{xt} + (vw)_x = 0,$$
$$v_{xt} - 2u_x v = 0,$$
$$w_{xt} - 2u_x w = 0.$$

115. Fitz-Hugh-Nagumo 方程 [201]

$$u_t = u_{xx} + u(1-u)(u-\alpha) - v,$$
$$v_t = \beta v_{xx} + \gamma u - \delta v.$$

116. 扑食方程 [201]

$$u_t = \alpha_1 u_{xx} + \beta u - \gamma_1 uv,$$
$$v_t = \alpha_2 v_{xx} + \gamma_2 uv - \delta v.$$

117. 非线性耦合热方程 [202,203]

$$u_{tt} = uu_{xx},$$
$$u_{tt} = uu_{xx} + u_x^2,$$
$$u_{tt} = (e^{\lambda u} u_x)_x.$$

118. Pochhammer-Chree 方程 [172]

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} + \beta u + \gamma u^3 + \delta u^5 = 0,$$

$$u_{tt} - u_{ttxx} - (a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5)_{xx} = 0.$$

119. 修正的 cKdV 方程 [212]

$$u_t = v_x - \frac{3}{2}uu_x + \beta u_x,$$
$$v_t = \frac{1}{4}u_{xxx} - vu_x - \frac{1}{2}uv_x + \beta v_x.$$

120. 超 Schrödinger 方程 [228]

$$iq_t + q_{xx} - 2(|q|^2 - \rho + 2k\tilde{r}r)q + 4irr_x = 0,$$
$$ir_t + 2r_{xx} - (|q|^2 - \rho)r + ik(2q\tilde{r}_x + q_x\tilde{r}) = 0.$$

121. 耦合 Harry-Dym 方程 [229]

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{2}uu_x + v_x + \alpha u_x,$$
$$v_t = -u_x v - \frac{1}{2}uv_x + \alpha v_x.$$

122. 耦合波动方程 [230,231]

$$u_{tt} - u_{xx} = \lambda u - \delta_1 u^3 - \mu uv^2,$$
$$v_{tt} - v_{xx} = \lambda v - \delta_2 v^3 - \mu vu^2.$$

123. Massice Thirring 模型 [236,237]

$$iu_x + v + u|v|^2 = 0,$$
$$iv_t + u + v|u|^2 = 0.$$

124. Ginzburg-Landun 方程 [376]

$$iu_t + \left(\frac{1}{2} - ir_1\right)u_{xx} + (\sigma + ir_2)|u|^2 u - ir_0 u + (1 + i\lambda)v = 0,$$
$$iv_t + k_0 v - icv_x + i\Gamma_0 v + (1 + i\lambda)u = 0.$$

125. Jimbo-Miwa (JM1) 方程 [240]

$$4u_t - u_{xxx} + 6u^2u_x - 6(uv_x + u_x v) - 3v_{xx} = 0,$$
$$2v_t + v_{xx} + 3v_x(v - u^2 + u_x) = 0.$$

126. JM3 方程 [240]

$$u_t + vu_x + u_x + v_{xx} = 0,$$
$$v_t - 3vv_x + 2v_{xxx} + 2v_x(2u_x - u^2) + 2(u_{xx} - uu_x)v = 0.$$

127. SKdV 方程 [246]

$$u_t - \frac{1}{4}(u_{xxx} + 6uu_x + 12vv_{xx}) = 0,$$
$$v_t - \frac{1}{4}(4v_{xxx} + 6uv_x + 3u_x v) = 0.$$

128. 联系 Schrödinger 方程的非线性模型 [250~252]

$$u_t = (\psi^n)_x,$$
$$\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi,$$

通常称负 KdV 方程 [250], 在 Miura 变换下与 Sine-Gordon 方程相联系 [251].

129. super MKdV 方程 [254]

$$u_t = (6v^2 - 6v_x)u_x + (6vv_x - 3v_{xx})u - uu_{xxx},$$
$$v_t = 6v^2 v_x - v_{xxx} + \frac{3}{4}(uu_{xx})_x + \frac{3}{2}u(vu_x)_x.$$

130. Landau-Lifshitz (LF) 方程 [256,257]

$$S_t = S \wedge S_{xx} + S \wedge JS,$$

其中

$$J = diag(J_1, J_2, J_3), \quad J_1 < J_2 < J_3, \quad S = (S_1, S_2, S_3),$$
$$|S|^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1.$$

当 $J = 0$ 时, LF 方程约化为 Heisenberg 铁磁链方程

$$S_t = S \wedge S_{xx}.$$

131. Maxwell-Bloech 方程 [258]

$$E_t - v = 0, \quad v_x - wr - Eq = 0,$$
$$q_x + Ev = 0, \quad r_x + wv = 0.$$

132. 三波方程 [260,261]

$$u_{it} + a_i u_{ix} = b_i u_j^* u_k^*,$$

其中 a_i, b_i 为常数. $i, j, k = 1, 2, 3.$

133. N 波方程 [262]

$$Q_t^{ij} = \alpha_{ij} Q_x^{ij} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{ik} - \alpha_{kj}) Q^{ik} Q^{kj}.$$

由 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 方程构成，其中

$$Q^{ij} = \sigma_{ij} Q^{ji}, \quad Q^{ii} = 0,$$

$$\sigma_{ik}\sigma_{kj} = -\sigma_{ij}, \quad j \neq k, \quad k \neq i,$$

α_{ij} 为实数.

II. 2+1 维和高维非线性方程

1. 2+1 维 Burgers 方程 [373]

$$(u_t + uu_x - u_{xx})_x + u_{yy} = 0.$$

2. KP 方程 [1,2,42]

$$(u_t + uu_x + u_{xxx})_x + \alpha^2 u_{yy} = 0.$$

3. 2+1 维 MKP 方程 [293]

$$u_t - u_{xxx} + 6u^2 u_x + 3\sigma^2 \partial^{-1} u_{yy} = 0.$$

4. 2+1 维 Boussinesq 方程 [377]

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - (u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0.$$

5. 3+1 维 KdV 型方程 [287]

$$u_t + 6u_x u_y + u_{xxy} + w_{xxxxz} + 60u_x^2 u_z + 10u_z u_{xxx} + 20u_x u_{xxz} = 0.$$

6. 2+1 维 Cadrey-Dodd-Gibbon 方程 [263]

$$u_t = u_{5x} + 5(u_x u_{xx} + uu_{xxx} + u^2 u_x + u_{xxy} + uu_y + u_x \partial_x^{-1} u_y - \partial_x^{-1} u_{yy}).$$

7. 柱形式耗散 Zaboloskaya-Khokhlov 方程 [202]

$$u_{xt} + uu_{xx} + u_x^2 + u_{xxx} + r^{-1} u_r + u_{rr} = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

8. Navier-stokes 方程 [202]

$$u_t + u.\bigtriangledown u = -\bigtriangledown p + \alpha \bigtriangledown^2 u, \bigtriangledown u = 0.$$

9. 2+1 维 AKNS 浅水波方程 [265]

$$u_t - u_{xxt} - 4uu_t - 2u_x\partial_y^{-1}u_t + u_x = 0.$$

10. 2+1 维 Gardner 方程 [279]

$$u_t + u_{xxx} + 6\beta uu_x - \frac{3}{2}\alpha^2u^2u_x + 3\sigma^2\partial_x^{-1}u_{yy} - 3\alpha\sigma u_x\partial_x^{-1}u_y = 0.$$

11. 2+1 维 Khokhlov-Zabolotskya 方程 [292]

$$2u_t + u_{xxx} + u_{yyy} + 3(u\partial_y^{-1}u_x)_x + 3(u\partial_x^{-1}u_y)_y = 0.$$

12. N+1 维 Sine-Gordon 方程 [294]

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_ix_i} - u_{tt} = \sin u.$$

13. 2+1 维 Sawada-Kotera 方程 [293]

$$u_t = (u_{4x} + 5uu_{xx} + \frac{5}{3}u^3 + 5u_{xy})_x - 5\partial_x^{-1}u_{yy} + 5uu_y + 5u_x\partial_x^{-1}u_y = 0.$$

14. 3+1 维立方 Schrödinger 方程 [202]

$$iu_t + \Delta u + \alpha u|u|^4 + \beta u|u|^2 = 0.$$

15. N+1 维 Schrödinger 方程 [273]

$$iu_t + u_{x_ix_i} - \alpha|u|^2u + \beta u = 0.$$

16. N+1 维 Schrödinger 方程 [295]

$$i\phi_{mt} + \phi_{mxx} + k_m\phi_m + \Big(\sum_{n=1}^{N}|\phi_n|^2\Big)\phi_m + \Big(\sum_{n=1}^{N}q_{mn}\phi_n^2\Big)\phi_m^* = 0, \quad m = 1, \cdots, N.$$

其中 p_{mn}, q_{mn}, k_m 为介质参数，下标 m 为 ϕ 的不同分量.

17. 3+1 维 Jimbo-Miwa 方程 [278]

$$u_{xxxy} + 3(uu_y)_x + 3u_{xx}\partial_x^{-1}u_y + 3u_xu_y + 2u_{yt} - 3u_{zz} = 0.$$

18. 2+1 维 Harry-Dym 方程 [283,284]

$$u_t + u^3 u_{xxx} + \frac{3}{u}\left(u^2 \partial_x^{-1}\left(\frac{u_y}{u^2}\right)\right)_y = 0.$$

19. Boiti-Leon-Manna-Pempinelli 方程 [266,267]

$$u_{yt} + u_{xxxy} - 3u_{xx}u_y - 3u_x u_{xy} = 0.$$

20. 2+1 维 Sine-Gordon 方程 [244]

$$u_t + u_{xxx} + u_{yyy} + 3(u\partial_y^{-1}u_x)_x + 3(u\partial_x^{-1}u_y)_y = 0.$$

21. 破裂孤立子方程 [101]

$$u_{xt} - 4u_x u_{xy} - 2u_y u_{xx} - u_{xxxy} = 0.$$

22. 广义破裂孤立子方程 [272]

$$u_t + u_{xxx} + bu_{xxy} + 6au_x + 4buu_y + 4bu_x\partial_x^{-1}u_y = 0.$$

23. Bogoyavlenskii's 广义破裂孤子方程 [268]

$$(u_{xt} - 4u_x u_{xy} - 2u_y u_{xx} + u_{xxxy})_x = -\alpha^2 u_{yyy}.$$

24. Novikov-Veselov 方程 [269]

$$u_t + u_{xxx} + u_{yyy} + 3(u\partial_y^{-1}u_x)_x + 3(u\partial_x^{-1}u_y)_y = 0.$$

25. 2+1 维 Burgers 方程 [274]

$$(u_t + uu_x - u_{xx})_x + u_{yy} = 0.$$

26. 2+1 维 KdV-Burgers 方程 [270]

$$(u_t + uu_x + \alpha u_{xxx} - \beta u_{xx})_x + \gamma u_{yy} = 0.$$

27. 2+1 维 KK 方程 [275]

$$9u_t + u_{5x} + 15uu_{xxx} + \frac{75}{2}u_x u_{xx} + 45u^2 u_x + 5\sigma u_{xxy}$$
$$-5\sigma\partial_x^{-1}u_{yy} + 15\sigma uu_y + 15\sigma u_x\partial_x^{-1}u_y = 0.$$

28. 高维耦合 Burgers 方程 [272]

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + 2uu_x + 2vu_y,$$

$$v_t = v_{xx} + v_{yy} + 2uv_x + 2vv_y.$$

29. 2+1 维耗散长水波方程 [139]

$$u_{yt} + v_{xx} + \frac{1}{2}(u^2)_{xy} = 0,$$

$$v_t + (uv + u_{xy})_x = 0.$$

30. 2+1 维 KP 方程组 [276]

$$\begin{aligned} q_t &= \frac{1}{8}(q_{xxx} - 6q^2 q_x + 6q_x \partial^{-1} q_y + 3\partial^{-1} q_{yy}), \\ p_t &= \frac{1}{8}(p_{xxx} - 6pp_x + 3\partial^{-1} p_{yy}) + \frac{3}{4}(pq_x - pq^2 + p\partial^{-1} q_y)_x. \end{aligned}$$

31. Mel'nikov 方程 [264]

$$\begin{aligned} &(u_t + uu_x + u_{xxx})_x \pm ku_{yy}(vv^*)_{xx} = 0, \\ &iv_y + v_{xx} + uv = 0. \end{aligned}$$

32. 2+1 维破裂孤立子方程 [277]

$$q_t - iq_{xy} + 2iq\partial_x^{-1}(qr)_y = 0,$$

$$r_t + ir_{xy} - 2ir\partial_x^{-1}(qr)_y = 0.$$

33. 2+1 维三波方程 [280~282]

$$\begin{aligned} f_{1t} &= \alpha_1 f_{1y} + \beta_1 f_{1x} + (\alpha_3 - \alpha_2) f_2 \tilde{f}_3, \\ f_{2t} &= \alpha_2 f_{2y} + \beta_2 f_{2x} + (\alpha_1 - \alpha_3) f_1 \tilde{f}_3, \\ f_{3t} &= \alpha_3 f_{3y} + \beta_3 f_{3x} + (\alpha_2 - \alpha_1) f_2 \tilde{f}_1. \end{aligned}$$

34. 2+1 维耗散长水波方程 [285,286]

$$\begin{aligned} &u_t - u_{xx} - 2(uv)_x = 0, \\ &v_{ty} + v_{xxy} - 2u_{xx} - (v^2)_{xy} = 0. \end{aligned}$$

35. 2+1 维 Ernst 方程 [288,289]

$$F\nabla^2 F = (\nabla F)^2 - (\nabla G)^2,$$
$$F\nabla^2 G = (\nabla F)(\nabla G),$$

其中 ∇ 为梯度算子. 这个系统等价于稳定的轴对称真空 Einstein 方程 [290,291]

$$\nabla^2 F = F_{rr} + \frac{F_r}{r} + F_{zz}, \quad |\nabla F|^2 = F_r^2 + F_z^2, \quad F = F(r,z).$$

36. 2+1 维 Davey-Stewartson 方程 [2]

$$iu_t + u_{xx} + \frac{1}{\alpha^2}u_{yy} + \frac{2\epsilon}{\alpha^2}|u|^2 u - \frac{2}{\alpha^2}uv,$$
$$v_{yy} - \alpha^2 v_{xx} - 2\alpha^2\epsilon(|u|^2)_{xx} = 0,$$

当 $\epsilon = 1$, $\alpha = \pm 1$ 时, 称 DSI 方程, 当 $\epsilon = 1$, $\alpha = \pm i$ 时, 称 DSII 方程.

37. 2+1 维耦合非线性 Schrödingger 方程 [296]

$$iu_t - u_{xy} - v|u|u = 0,$$
$$v_t - 2|u|_x^2 = 0.$$

38. Einstein-Maxwell 方程 [244]

$$(uu^* + vv^* - 1)\nabla^2 u = 2\nabla u(u^*\nabla u + v^*\nabla v),$$
$$(uu^* - 1)\nabla^2 v = 2\nabla v(u^*\nabla u + v^*\nabla v),$$
$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

39. 量子 Yang-Baxter 方程 [297~299]

$$\check{R}_{12}(u,\xi,\eta)\check{R}_{23}(u+v,\xi,\lambda)\check{R}_{12}(v,\eta,\lambda) = \check{R}_{23}(v,\eta,\lambda)\check{R}_{12}(u+v,\xi,\lambda)\check{R}_{23}(u,\xi,\eta),$$
$$\check{R}_{12}(u,\xi,\eta) = vR(u,\xi,\eta)\otimes I, \quad \check{R}_{23}(u,\xi,\eta) = I\otimes vR(u,\xi,\eta),$$

其中 $\check{R}(u,\xi,\eta)$ 为 N^2 维函数矩阵, I 为 N 维单位矩阵, $\otimes$ 为两个矩阵的张量积, u,v 为谱参数, ξ,η 为色参数.

40. Self-dual Yang-Mills 方程 [2,42]

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - [A_\mu, A_\nu],$$

其中 $x_\mu, \mu = 0,1,2,3$ 为 Euclidian 空间 E^4 中的协坐标, A_μ 和 A_ν 称 Yang-Mills 位势.

41. Bo'erziman 方程 [300]

$$\frac{1}{\mathbf{v}}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\Omega\cdot\nabla\phi+\sigma\phi=\int\sigma' f\phi(\mathbf{r},\mathbf{v}',t)d\mathbf{v}'+\varphi,$$

其中 t 表示时间， $\mathbf{r},\mathbf{v}$ 分别为中子的位置和速度， Ω 为沿中子的单位向量， $\sigma(\mathbf{v},\mathbf{r})$ 为总截面， $\sigma'=\sigma(\mathbf{v}',\mathbf{r})$; $f(\mathbf{v}'\to\mathbf{v},\mathbf{r})d\mathbf{v}$ 为概率， φ 为主流.

42. Cahn-Hilliard 方程 [301]

$$u_t+\Delta^2 u=\Delta f(u),\quad f(u)=\sum_{j=1}^{2n-1}a_j u^j.$$

43. Konopelchenko-Rogers 方程 [248,249]

$$\left(\frac{\phi_X}{\sin\theta}\right)_X-\left(\frac{\phi_Y}{\sin\theta}\right)_Y-\frac{\theta_Y\phi_X-\theta_X\phi_Y}{\sin^2\theta}=0,$$
$$\left(\frac{\tilde\phi_X}{\sin\theta}\right)_X-\left(\frac{\tilde\phi_Y}{\sin\theta}\right)_Y-\frac{\theta_X\tilde\phi_Y-\theta_Y\tilde\phi_X}{\sin^2\theta}=0.$$

44. 磁动力方程 [302]

$$\rho_t+\nabla(\rho v)=0,$$
$$\rho(v_t+v\nabla v)=-\nabla p+R_H(\nabla\times H\times H)+\chi\Delta v+(\xi+\frac{1}{\xi})\nabla(\nabla v),$$
$$H_t=\nabla\times(v\times H)-\frac{1}{R_\rho}\nabla\times(v_H\nabla\times H),$$
$$\rho_t+v\nabla p+\gamma p\nabla v=(\gamma-1)\left(\frac{R_H}{R_\rho}v_H(\nabla\times H)^2+\sum\sigma_{i,k}\frac{\partial v^i}{\partial x^k}+\nabla(k\nabla T)\right),$$
$$\nabla H=0,$$

其中 v 为流体速度， H 为磁场， ρ 为质量密度， p 为压强， T 为温度， χ and ξ 为黏性系数， $v_H=1/(\sigma\mu)$ 磁场速度， σ 为电导体，

$$\sigma'_{ik}=\chi(\frac{\partial v^i}{\partial x^k}+\frac{\partial v^k}{\partial x^i}+(\xi-\frac{2}{\xi}\chi)\delta_{ik}\sigma_{ik}\sum\frac{\partial v^l}{\partial x^l}$$

为各压力张量， $R_H=\mu_0H_0^2/\rho_0v_0^2$ 为磁场压力数.

III. 变系数非线性方程

1. 变系数 Burgers 方程 [313]

$$u_t+f(x,t)uu_x+g(x,t)u_{xx}=0.$$

2. 变系数 KdV 方程 [304~306]

$$u_t + f(t)uu_x + g(t)u_{xxx} = 0.$$

3. 变系数 KdV 方程 [1]

$$u_t + 6h_1(uu_x + u_{3x}) + 4h_2 - h_3(2u + xu_x) = 0.$$

4. 变系数 Schrödinger 方程 [303]

$$iu_t + f(x,t)u_{xx} + g(x,t)u|u|^2 + h(x,t)u = 0.$$

5. 变系数 KdV 方程 [311]

$$u_t + \alpha t^n uu_x + \beta t^m u_{xxx} = 0.$$

6. 变系数 KP 方程 [1]

$$u_t + 6(u_x^2 + uu_{xx}) + u_{xxx} + g^4 u_{yy} + 6fu_x - (f' + 12f^2) = 0.$$

7. 变系数 KP 方程 [310]

$$u_t = h(u_{xxx}+6uu_x+3\sigma^2\partial_x^{-1}u_{yy})+b_1u_x-k(xu_x+2u+2yu_y)-\sigma b_1u_y-2\sigma b_1\partial_x^{-1}u_y = 0.$$

8. 变系数 Schrödinger 方程 [309]

$$iu_t + f(t)u_{xx} + g(t)u|u|^2 = 0.$$

9. 变系数 Zakharrov-Kuznetsov 方程 [307,308]

$$\begin{aligned}
&u_t + uu_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0,\\
&u_t + f(x,y,t)uu_x + g(x,y,t)u_{xxx} + h(x,y,t)u_{xxy} = 0.
\end{aligned}$$

10. 变系数 Davery-Stewartson 方程 [312]

$$\begin{aligned}
&iu_t = \frac{\sigma}{2}(u_{yy} - u_{xx}) + \sigma|u|^2u + 2uv + i(\lambda_R x - i\lambda_I)u + ku_{xy},\\
&u_{xx} + v_{yy} + \sigma(|u|^2)_{xx} - k(|u|^2)_{xy} = 0,
\end{aligned}$$

其中 $\sigma(t), \lambda(t), k(t)$ 为 t 的函数， σ, k 为实数， λ_R 和 λ_I 分别为 λ 的实部和虚部.

IV. 离散和差分方程

1. Toda 格 [314,315]

$$u_{ntt} = \exp\{-(u_n - u_{n-1})\} - \exp\{(u_{n+1} - u_n)\}.$$

2. 二维 Toda 格 [329]

$$Q_{nxy} = \exp(Q_{n-1} - Q_n) - \exp(Q_n - Q_{n+1}).$$

3. 离散 Schrödinger 方程 [316]

$$iu_{nt} = (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \pm |u_n|^2(u_{n+1} + u_{n-1}).$$

4. 离散 KdV 方程 [317,318]

$$u_{nt} = \exp(u_{n+1}) - \exp(u_{n-1}).$$

5. 离散 MKdV 方程 [319]

$$u_{nt} = (1 \pm h^2 u_n^2)(u_{n+1} - u_{n-1}).$$

6. 离散 Sine-Godon 方程 [320]

$$u_{n+1t} - u_{nt} = \sin(u_{n+1} + u_n).$$

7. Hirota-Miwa 方程或离散 KP 方程 [322]

$$(a_2 - a_3)\tau(n_1, n_2+1, n_3+1)\tau(n_1+1, n_2, n_3) + (a_3 - a_1)\tau(n_1+1, n_2, n_3+1)$$
$$\tau(n_1, n_2+1, n_3) + (a_1 - a_2)\tau(n_1+1, n_2+1, n_3)\tau(n_1, n_2, n_3+1) = 0.$$

8. Volterrage 格 [327,328]

$$u_t(n) = u(n)(u(n-1) - u(n+1)).$$

9. 微分 - 差分 CDGKS 方程 [331]

$$\frac{u_n^{t+\delta}\left(1 - \frac{8}{9}\delta + \delta u_{n+1}^{t+\delta}\right)}{1 + \frac{1}{9}\delta u_n^{t+\delta} u_{n+1}^{t+\delta} u_{n+2}^{t+\delta}} = \frac{u_n^t\left(1 - \frac{8}{9}\delta + \delta u_{n-1}^t\right)}{1 + \frac{1}{9}\delta u_n^t u_{n-1}^t u_{n-2}^t}.$$

10. Self-dual 网络方程 [321]

$$\begin{aligned}u_{nt} &= (1 \pm u_n^2)(v_n - v_{n-1}),\\ v_{nt} &= (1 \pm v_n^2)(u_{n+1} - u_{n-1}).\end{aligned}$$

11. Belov-Chaltikian 格 [323]

$$\begin{aligned}b_t(n) &= b(n)(b(n+1) - b(n-1)) - c(n) + c(n-1),\\ c_t(n) &= c(n)(b(n+2) - b(n-1)).\end{aligned}$$

12. Blaszak-Marcinik 格 [324,325]

$$\begin{aligned}a_t(n) &= c(n+1) - c(n-1),\\ b_t(n) &= a(n-1)c(n-1) - a(n)c(n),\\ c_t(n) &= c(n)(b(n) - b(n+1)).\end{aligned}$$

13. 4- 场格 [326]

$$\begin{aligned}u_t(n) &= u(n)(v(n) - v(n-1)),\\ v_t(n) &= w(n)u(n+1) - u(n)w(n-1),\\ w_t(n) &= q(n)u(n+2) - u(n)q(n-1),\\ q_t(n) &= u(n+3) - u(n).\end{aligned}$$

14. 离散 Tzitzeica 方程 [330]

$$\begin{aligned}A_2 &= \frac{H_1}{H}A,\\ B_1 &= \frac{H_2}{H}B,\\ H_{12} &= \frac{H(H-1)}{H^2(H_1+H_2-H_1H_2) - H + ABH_1H_2}.\end{aligned}$$

15. Ablowitz-Ladik 方程 [332,333]

$$\begin{aligned}&iq_{nt} + (q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n) + q_n r_n(q_{n+1} + q_{n-1}) = 0,\\ &ir_{nt} - (r_{n+1} + r_{n-1} - 2r_n) + q_n r_n(r_{n+1} + r_{n-1}) = 0.\end{aligned}$$

16. q-schrödinger 方程 [334,335]

$$-\partial_q^2\psi_0(z) + z^2\psi_0(z) = \frac{q^{1/2}\psi_0(qz) + q^{-1/2}\psi_0(q^{-1}z)}{q^{1/2} + q^{-1/2}},$$

其中 q- 离散导数定义为

$$\partial_q = \frac{q^{z(d/dz)} - q^{-z(d/dz)}}{(q-q^{-1})z}.$$

17. q-KdV 方程族 [336~338]

$$L_{t_n} = [B_n, L], \quad n = 1, 2, \cdots,$$
$$L = \partial_q^N + u_{N-1}\partial_q^{N-1} + \cdots + u_0, \quad B_n = L_+^{n/N},$$

其中 q 导数定义为

$$\partial_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{x(q-1)}.$$

参　考　文　献

[1] 谷超豪. 孤立子理论及其应用. 浙江科技出版社, 1990

[2] 谷超豪, 胡和生, 周子翔. 孤立子中的 Darboux 变换及其几何应用. 上海科技出版社, 1999

[3] H S Hu. Lett. Math Phys, 1999(49): 48

[4] C H Gu. Acta Appl Math, 1995(39): 349

[5] C H Gu. Lett Math Phys, 1994(32): 1

[6] Z X Zhou. Phys Lett A, 1994(195): 339

[7] Z X Zhou. Inverse Probl, 1996(12): 89

[8] Y J Zhang. J Geom Phys, 2002(40): 215

[9] 张友金. 中国科学. 1990(33): 785

[10] 曹策问. 科学通报. 1989(34): 723

[11] 曹策问. 中国科学. 1990(33): 528

[12] X G Geng. Physica A, 1992(180): 241

[13] X G Geng and Y T Wu. J Math Phys, 1999(40): 2971

[14] G Z Tu. J Phys A. Math Gen. 1990(23): 3903

[15] G Z Tu. J Math Phys. 1989(30): 330

[16] S Y Lou and L L. Chen Math Method Appli Sci. 1994(17): 339

[17] S Y Lou. Phys Lett A, 1993(176): 96

[18] Y B Zeng and Y S Li. J Math Phys, 1990(31): 2835

[19] Y B Zeng. Physica D, 1994(73): 171

[20] Y Cheng and Y S Li. Phys Lett A, 1991(157): 22

[21] 李翊神, 陈登远. 数学学报, 1986(29): 127

[22] Y S Li. J Phys A. 1996(29): 4187

[23] Z J Qiao. Phys Lett A, 1994(195): 319

[24] 乔志军. 应用数学, 1995(18): 287

[25] Z J Qiao. Phys Lett A, 1995(206): 347

[26] R G Zhou. J Math Phys, 1998(39): 2848

[27] R G Zhou. Appl Math Lett, 2000(13): 178

[28] 马文秀. 科学通报, 1993(38): 1543

[29] W X Ma, B Fuchssteiner. J Math Phys, 1999(40): 2400

[30] E G Fan. J Math Phys, 2001(42): 4337

[31] E G Fan. Physica A, 2001(301): 105

[32] E G Fan. Phys Lett A, 2000(274): 135

[33] 吴文俊. 科学通报, 1986(31): 535

[34] 吴文俊. 数学机械化. 北京: 科学出版社, 1999

[35] X S Gao and S Q Chou. Comput Aided Des, 1998(30): 115
[36] X S Gao and S Q Chou. J Symb Comput, 1993(16): 585
[37] F Schwarz. Comput, 1992(49): 95
[38] P J Olver. Applications of Lie group to differential equation, New York: Springer, 1986
[39] G W Bluman and S Kumei. Symmetries and differential equations. Berlin: Springer, 1989
[40] 李志斌, 张善卿. 数学物理学报, 1997(17): 81
[41] X G Geng and H H Dai. J Math Anal Appl, 1999(233): 26
[42] M J Ablowitz and P A Clarkson. Soliton, nonlinear evolution equations and inverse scattering. Cambridge Univ. Press, 1991
[43] 李翊神. 数学进展, 1989(18): 356
[44] X B Hu. J Phys A, 1994(27): 201
[45] V B Matveev, M A Salle. Darboux transformations and solitons, Berlin: Springer, 1991
[46] H D Wahlquist and F B Estabrook. J Math Phys, 1976(17): 1293
[47] D G Zhang. Phys Lett, A, 1996(223): 436
[48] J Weiss, M Tabor and G Carnevale. J Math Phys, 1983(24): 13
[49] W Hereman and M Takaoka. J Phys A, 1990(23): 4805
[50] W Hereman. Computer Phys Commun, 1991(65): 143
[51] E J Parkes and B R Duffy. Computer Phys Commun, 1996(98): 288
[52] B R Duffy and E J Parkes. Phys Lett, A, 1996(214): 271
[53] E J Parkes and B R Duffy. Phys Lett, A, 1997(229): 217
[54] Z B Li. Exact solitary wave solutions of nonlinear evolution equations, In: Mathematics Mechanization and Application, Eds. X S Gao and D M Wang, England: Academic Press, 2000
[55] Z B Li and M L Wang. J Phys A, 1993(26): 6027
[56] Z B Li and Y P Liu. Computer Phys Commun, 2002 to appear
[57] E G Fan. Phys Lett A, 2000(277): 212
[58] B Buchberger. Gröbner Bases: an algorithmic method in polynomial ideal theory, Recent trends in multidimensional system theory. Ed N K Bose. Reidel Publishing Company, 1985
[59] Q Cox, J Little and D O'shea. Ideals, varieties and algorithms: An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. Springer, UTM, 1992
[60] S Y Lou, G Huang and Y H Ruan. J Phys A, 1991(24): L584
[61] W Malfliet. Am J Phys, 1992(60): 650
[62] E J Parkes. J Phys A, 1994(27): L497

[63] E G Fan. J Zhang and Y C Hon. Phys Lett A, 2001(291): 376
[64] V V Gudkov. J Math Phys, 1997(38): 4794
[65] M J Ablowitz, Ramani and H Segur. J Math Phys, 1980(21): 715
[66] J Weiss. J Math Phys, 1984(25): 13
[67] G W Bluman and J D Cole. J Math Mech, 1969(18): 1025
[68] Y B Zeng. Chin Ann of Math, 1991(24): 78
[69] N Nirmala and M Vedan. J Math Phys, 1984(27): 2644
[70] W Hong and Y D. Jung. Phys Lett A, 1999(257): 149
[71] S Lie. Arch for Math, 1881(6): 328
[72] P A Clarkson and M D. Kruskal. J Math Phys, 1989(30): 2201
[73] S Y Lou. J Phys A, 1990(23): L649
[74] S Y Lou. J Math Phys, 1992(33): 4300
[75] P A Clarkson, J Phys A, 1990(22): 2355
[76] P A Clarkson. Nonlinearly, 1992(5): 453
[77] C Z Qu. Commun Theor Phys, 1996(22): 369
[78] P A Clarkson and E L Mansfield. Physica D, 1993(70): 250
[79] E G Fan and H Q Zhang. Appl Math Mech, 1998(19): 645
[80] E G Fan. Commun Theor Phys, 2001(35): 523
[81] F Magri. J Math Phys, 1978(19): 1156
[82] F Magri. Lectures Notes in Phys, Berlin: Springer, 1980, Vol. 120
[83] I M Gel'fand and I Y Dorfman. Funct Anal Appl, 1981(15): 173
[84] Y Natku. J Math Phys, 1987(28): 2579
[85] Y T Wu, X G Geng, X B Hu, S M Zhu. Phys Lett A, 1999(255): 259
[86] J Z Qiao. J Phys A, 1993(26): 4407
[87] W X Ma, B Fuchssteiner. Physica A, 1996(233): 331
[88] Y B Zeng. Phys Lett A, 1991(160): 541
[89] D Levi. Inverse Probl, 1988(4): 165
[90] P G Esteevez. J Math Phys, 1999(40): 1406
[91] G Neugebauer and R Meinel. Phys Lett A, 1984(100): 467
[92] C H Gu, H S Hu. Lett Math Phys, 1986(11): 325
[93] C H Gu. Lett Math Phys, 1998(46): 347
[94] W X Ma. Lett Math Phys, 1997(39): 33
[95] C H Gu. Lett Math Phys, 1992(26): 199
[96] Z X Zhou. Inverse Probl, 1998(14): 1353
[97] E G Fan. J Phys A, 2000(33): 6925
[98] E G Fan. J Math Phys, 2000(41): 7769
[99] J N Gao. J Math Phys, 2000(41): 4687
[100] J F Zhang. Int J Theor Phys, 1996(35): 1793

[101] E G Fan and H Q Zhang. Phys Lett A, 1998(246): 403
[102] P G Estevez. J Phys A, 1994(27): 2113
[103] M C Nucci and P A Clarkson. Pys Lett A, 1992(164): 49
[104] N A Kudryashov. Phys Lett A, 1990(147): 287
[105] N A Kudryashov and D Zargaryan. J Phys A, 1996(29): 8067
[106] G I Sivashinsky. Physica D, 1982(4): 227
[107] T Kawahara. Phys Rev Lett, 1983(51): 381
[108] R L Sachs. Physica D, 1988(30): 1
[109] M L Wang and Z B Li. Phys Lett A, 1996(216): 67
[110] J Satsuma. Topics in soliton theory and exactly solvable nonlinear equations. ed. M Abolowitz, B Fuchssteiner and M Kruskal. Singapore: World Scientific, 1987
[111] H Whilemsson. Phys Rev A , 1990(36): 965
[112] M Airault, H. Mckean and J Moser. Commun Pure Appl Math, 1977(30): 95
[113] M Adler and J Moser. Commun Math Phys, 1978(19): 1
[114] A Nakamura and R Hirota. J Phys Soc Jpn, 1985(54): 491
[115] R L Sachs. Physica D, 1988(30): 1
[116] C J Coleman. J Aust Math Soc Ser B, 1992(33): 1
[117] N F Smyth. J Aust Math Soc Ser B, 1992(33): 403
[118] P A Clarkson and E L Mansfield. Physica D, 1993(70): 250
[119] E G Fan and H Q Zhang. Phys Lett A, 1998(245): 389
[120] M L Wang. Phys Lett A, 1995(199): 169
[121] M L Wang and Z B Li. Phys Lett A, 1996(213): 279
[122] Z J Qiao. Mathematica Applicata, 1994(7): 320
[123] D J Kaup and A C Newell. J Math Phys, 1978(19): 798
[124] H H Chen, Y C Lee and C S Liu. Phys Scr, 1979(20): 490
[125] F Calogero and W Eckhaus. Inverse Problems, 1987(3): 229
[126] S Kakei, N Sasa and J Satsuma. J Phys Soc Jpn, 1995(64): 1519
[127] V S Gerdjikov and M I Ivanov. Bulg J Phys, 1983(10): 130
[128] A Kundu. Physica D, 1987(25): 399
[129] P A Clarson and C M Cosgrove. J Phys A, 1987(20): 2003
[130] A Kundu. J Math Phys, 1984(25): 3433
[131] M Wadati and K J Sogo. J Phys Soc Jpn, 1983(52): 394
[132] P J Olver. J Math Phys, 1977(18): 1212
[133] Z Y Yang. J Phys A, 1994(27): 2837
[134] G Z Tu. Research Reports in Physics, ed. C H Gu, Y S Li and G Z Tu. Berlin: Springer, 1990
[135] V I Arnold. Mathematical Methods of Classical Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1978

[136] G B Whitham. Proc R Soc A, 1967(299): 6
[137] L T F Broer. Appl Sci Res, 1975(31): 377
[138] B A Kupershmidt. Commun Math Prhys, 1985(99): 51
[139] M L Wang, Y B Zhou. Z B Li. Phys Lett A, 1996(216): 67
[140] H Y Ruan, S Y Lou. Commun Theor Phys, 1993(20): 73
[141] D Levi, A Sym, S. Wojciechowsk. J Phys A, 1983(16): 2423
[142] B Z Xu and S Q Zhao. Appl Math -JCU, 1992(7): 163
[143] W Oevel and B Fuchssreiner. Phys Lett A, 1982(88): 323
[144] D David, D Levi and P Wintemitz. Phys Lett A, 1987(118): 390
[145] S Y Lou. J Phys A, 1990(23): L649
[146] P A Clarkson and P Winternitz. Physica D, 1991(49): 257
[147] A S Fokas and P M Santini. J Math Phys, 1988(29): 604
[148] Y Cheng. J Math Phys, 1992(33): 3774
[149] Y S Li. J Phys A, 1996(29): 4187
[150] Y B Zeng and Y S Li. J Math Phys, 1990(31): 2835
[151] B Konopelchenko, J Sidorenko and W Strampp. Phys Lett A, 1991(157): 17
[152] V G Drinfeld. Proc. Int. Congress of Math. Berkley. New York: Academic, Vol.1, 1986, pp.793
[153] D H Zhang. J Phys A, 1993(26): 2389
[154] E Frenkel. IMRN, 1996(2): 55
[155] E Frenkel and N Reshetikhin. Comm Math Phys, 1996(178): 237
[156] B Khesin, V Lyubashenro, and C Roges. J Func Anal, 1997(143): 55
[157] R Baxter. Exactly solved models in statistical mechanics, London: Acdemic Press, 1982
[158] P Iliev. Lett Math Phys, 1998(44): 187
[159] M Adler et al. Phys Lett A, 1998(242): 139
[160] H Haine and P Iliev. J Phys. 1997(30): 721
[161] M S Tu et al. Lett Math Phys, 1999(49): 33
[162] M S Tu and C R Lee. Phys Lett A, 2000(266): 155
[163] 朱佐农. 物理学报, 1992(41): 1057
[164] 马文秀. 物理学报, 1993(42): 1731
[165] W X Ma. Phys Lett A, 1993(180): 221
[166] 朱佐农. 物理学报, 1996(45): 1777
[167] 潘秀德. 应用数学和力学, 1988(9): 281
[168] 熊树林. 科学通报, 1989(34): 26
[169] F Calogero. J Math Phys, 1987(28): 538
[170] V G Makhakov. Phys Rep, 1978(35): 1
[171] 王明亮. 应用数学, 1995(8): 51

[172] C E Seyler. Phys Fluids, 1984(27): 4
[173] A Korpel. Proc IEEE, 1984(72): 1109
[174] J K Hunter and J Scheurle. Physica D, 1988(32): 253
[175] H Hirota. Phys Lett A, 1980(76): 95
[176] F P Bretherton. Fluid Mech, 1964(12): 591
[177] M L Wang. Phys Lett A, 1988(131): 277
[178] J Satsuma. Topics in soliton theory and Soluvable nonlinear equations, ed. blowitz et. al, Singapore: World Scientific, 1987
[179] Y Chen. IMA J Math, 1992(48): 107
[180] P Constantin etc. Integral manifolds and inertial manifolds for disspative partial Equations, New York: Springer-Verlag, 1989
[181] W X Ma. Int J Nonlinear Mech, 1996(31): 329
[182] H Whilemsson. Phys Rev A, 1987(131): 277
[183] R K Dodd. Solitons and nonlinear wave equations, London: Academic Press, 1982
[184] S J Farlow. Partial differential equation for scientists and engineers Canada: Wiley Interscience, 1982
[185] N Isidore. J Phys A, 1996(29): 3679
[186] Y Kodama. J Stat Phys, 1985(39): 597
[187] T Yoshinaga et al. Phys Fluids, 1991(3): 83
[188] N A Kudryashov and E D Zargaryan. J Phys A, 1996(29): 8067
[189] A Pickering. J Phys A, 1993(26): 4395
[190] R Camassa et al. Phys Rev Lett, 1993(71): 1661
[191] G B Whitham. Nonlinear and nonlinear wavew, New York: Acadmic, 1973
[192] H Hirota. J Math Phys, 1986(27): 1499
[193] J D Murray. Mathematical Biology, Biomathematics 19, Berlin: Springer, 1989
[194] Q X Ye, et al. Nonlinear Anal TMA , 1987(11): 1289
[195] W Malfliet. J Phys A, 1991(249): 6027
[196] Lefever. Phys Lett A, 1977(60): 389
[197] B A Kaupershmit. Commu Math Phys, 1985(99): 51
[198] 王心宜, 赵南. 物理学报, 1990(40): 350
[199] D Y Chen and Y S Li. Acta Math Sin, 1986(2): 343
[200] M J Velan and M Lokshmanan. J Phys A, 1997(30): 3261
[201] 谷超豪, 李大潜. 应用偏微分方程, 北京: 高等教育出版社, 1993
[202] P A Clarkson. Math Comput Modeling, 1993(18): 45
[203] P J Olver et al. Phys Lett A, 1986(114): 107
[204] Oron et al. Phys Lett A, 1986(118): 172
[205] P A Clarkson et al. J Phys A, 1993(26): 133
[206] K Konono et al. J Phys Soc Jpn, 1974(37): 171

[207] P Han and S Y Lou. Commun Theor Phys, 1993(10): 257
[208] A P, Fordy and J. Gibbons Phys Lett A, 1980(75): 325
[209] S Y Lou. Phys Lett A, 1993(175): 23
[210] M A. Mohammad and M Can. J Phys A, 1995(28): 3223
[211] F Calogero and S D Lillo. Inverse Problem, 1981(2): 633
[212] A Degasperis and P C Sabatier. Phys Lett A, 1990(150): 380
[213] M S Alber et al. J Math Phys, 2000(41): 284
[214] H W Tam, X B Hu and D L Wang. J Phys Soc Jpn, 1999(68): 369
[215] J Satsuma and R Hirota. J Phys Soc Jpn, 1982(51): 3390
[216] H W Tam. J Phys Soc Jpn, 2000(69): 45
[217] Y Nutku J. Math Phys, 1987(28): 2579
[218] M Arik et al. J Math Phys, 1988(30): 1338
[219] D J Benny. Studies in Appl Math, 1977(56): 81
[220] Y Cheng. J Mth Phys, 1992(33): 3774
[221] Y Nutku. J Phys A, 1996(29): 3257
[222] S Ghosh, A Kundu and S Nandy. J Math Phys, 1999(40): 1993
[223] B Konopelchenko and V Dubrovsky. Phys Lett A, 1984(102): 15
[224] Z Jiang. Inverse Probl, 1989(40): 349
[225] M J Ablowitz, M D Kruskal and J F Ladik. SIAM J Appl Math, 1979(36): 428
[226] F Calogero and A Degasperis. J Math Phys, 1981(22): 23
[227] A S Fokas and B Fuchssteiner. Physica D, 1981(4): 47
[228] A N W Hone. J Phys A, 1999(32): L307
[229] V G Makhankov et al. Lett Math Phys, 1988(16): 89
[230] M Antonowicz and A P Fordy. Phys Lett A, 1987(122): 85
[231] Y J Zhu and S Y Lou. Commun Theor Phys, 1998(30): 147
[232] R Rajarman. Phys Rev Lett, 1979(42): 200
[233] W Hereman, P P Banejee and M R Chatterjee. J Phys A, 1989(22): 249
[234] Y Kodama. J Stat Phys, 1985(39): 597
[235] M J Potasek. J aPPL Phys, 1989(65): 941
[236] D J Frantzeskakis. J Phys A, 1996(29): 3631
[237] A V Vikhailov. JETP Lett, 1976(23): 320
[238] J Villarrod. Stud Appl Math, 1991(84): 207
[239] M J Abolowitz et al. Stud Appl Math, 1974(53): 243
[240] R Hirota and J Satsuma. J Phys Soc Jpn, 1974(40): 611
[241] X B Hu et al. Phys Lett A, 1999(262): 310
[242] A Fordy and J Gibbons. Phys Lett A, 1980(160): 347
[243] S Y Lou. Phys Lett A, 1994(187): 239
[244] F K Guo. Appl Math, 1989(2): 112

[245] M Lakshmanan and P Kalianppan. J Math Phys, 1983(24): 795
[246] S Y Sakovich. J Phys A, 1991(24): L519
[247] M Antonowicz and A P Fordy. Commun Math Phys, 1989(124): 487
[248] J K Hunter and Y X Zheng. Physica D, 1994(79): 361
[249] B Konopelchenko and C Rogers. Phys Lett A, 1991(158): 391
[250] J J C Nimmo. Phys Lett A, 1992(168): 113
[251] J M Verosky. J Math Phys, 1991(32): 1733
[252] S Y Lou. Phys Lett A, 1993(175): 23
[253] W Z Chen. Commun Theor Phys, 1995(24): 75
[254] A Kundu. J Math Phys, 1984(25): 3433
[255] P H M Kersten. J Math Phys, 1988(29): 2187
[256] W L Chan and Y K Zhang. J Math Phys, 1989(30): 2065
[257] Y L. Rodin. Physica D, 1984(21): 90
[258] Y L. Rodin. Physica D, 1987(24): 1
[259] J D Gibbon et al. Lett Nuovo Cim A, 1973(8): 775
[260] V E Zakharov and A V Mikhailov. Sov Phys JETP, 1978(47): 1017
[261] V E Zakharov and S V Manakov. Sov Phys JETP Lett, 1973(18): 243
[262] D J Kaup. Stud Appl Math, 1976(55): 19
[263] M J Ablowitz and R Haberman. J Math Phys, 1975(16): 2301
[264] S Y Lou. J Phys A, 1997(30): L95
[265] V K Mel'nikov. Lett Math Phys, 1983(7): 126
[266] C R Gilson and J J C Nimmo. Phys Lett A, 1993(180): 337
[267] C Z Qu. Commun. Theor Phys, 1996(25): 369
[268] M Boti et al. Inverse Probl, 1986(2): 271
[269] Y T Gao and B Tian. Computer Math Appl, 1997(33): 35
[270] B A Kupershmidt. Phys Lett A, 1984(102): 213
[271] W X Ma. J Phys A. Math Gen, 1993(26): L17
[272] K M Tamizhmani et al. Int J Nonlinear Mech, 1991(26): 427
[273] S Y Lou. Commun Theor Phys, 1996(26): 51.
[274] W H Hai. J Phys A, 1992(25): L515
[275] M Bartwcelli et al. Lett Nuovo Cimento, 1983(37): 433
[276] X B et al. Phys. Lett A, 1999(262): 409
[277] X G Geng and H H Dai. J Math Phys, 2000(41): 337
[278] O I Bogoyovlenskii. Akad Nauk SSSR Ser. Math, 1989(53): 234
[279] W Y Hong and K S Oh. Computers Math Appl, 2000(39): 29
[280] B G Konopelchenko and V G Dubrovsky. Phys Lett A, 1984(102): 15
[281] V E Zakharov and A B Shabat. Funct Anal Appl, 1974(8): 226
[282] Z X Zhou. J Math Phys, 1998(39): 986

[283] Y Cheng. Physica D, 1989(34): 277
[284] B G Konopelchenko and V G Durovsky. Phys Lett A, 1984(102): 15
[285] V G Durovsky and B G Konopelchenko. J Phys A, 1994(27): 4619
[286] M Boiti et al. Inverse Probl, 1987(3): 37
[287] V G Dubrovsky. J Phys, 1996(29): 3617
[288] S Y Lou. J Phys A, 1996(29): 5989
[289] N P Ernst. Phys Rev, 1968(167): 1175
[290] C M Cosgrove. J Math Phys, 1980(21): 2417
[291] R S Ward. Gen Rel Grav, 1983(15): 105
[292] J F Zhang et al. Commun Theor Phys, 1995(24): 69
[293] M C Nacci, J Phys A , 1989(22): 2897
[294] B L Guo. Acta Math Sin, 1983(26): 745
[295] F T Hior. J Phys A, 1999(32): 1217
[296] I A B Strachan. Inverse Probl, 1992(8): L21
[297] 葛墨林，薛康. Yang-Baxter 方程. 上海：上海科技出版社，1999
[298] J Murakami. Int J Mod Phys A, 1992(7): 765
[299] S K Wang. J Phys A, 1996(29): 2259
[300] R D Richtmyer and K W Morton. Difference method for initialvalue problem, New York: Int. Science, 1967
[301] B L Guo. Acta Math Sin New Series, 1996(12): 314
[302] J C Fuchs. J Math Phys, 1991(32): 1703
[303] S Y Lou. J Phys A, 1996(29): 4589
[304] R H J Grimshaw. Proc R Soc A, 1979(368): 359
[305] N Toshi. Phys Lett A, 1987(125): 465
[306] W P Hong and Y D Jung. Phys Lett A, 1999(257): 149
[307] B K Shvamoggi and D K Rollins. Phys Lett A, 1991(160): 263
[308] A M Hamza. Phys Lett A, 1994(190): 309
[309] N Joshi. Phys Lett A , 1987(125): 456
[310] W L Chan et al. J Math Phys, 1992(33): 3759
[311] N Nirmala and M J Vedan. J Math Phys, 1986(27): 2644
[312] W L Chan and Z X Zhou. Lett Math Phys, 1992(25): 327
[313] C Z Qu and A Q Wang. Commun Theor Phys, 1996(26): 369
[314] M Toda. J Phys Soc Jpn, 1967(22): 431
[315] M Toda. Supp Prog Theor Phys, 1976(59): 1
[316] M J Abolowitz and J F Ladik. J Math Phys, 1975(16): 598
[317] S V Manakov. Sov Phys JETP, 1975(40): 269
[318] O I Bogoyavlensky. Acta Appl Math, 1988(13): 227
[319] M J Ablowitz and J F Ladik. Stud Appl Math, 1977(57): 1

[320] L Pilloni and D Leivi, Phys Lett A, 1982(92): 58
[321] M J Ablowitz and H Segur. Solitons and inverse scattering transformation, Philadelphia: SIAM, 1981
[322] J J C Nimmo, Chaos. Solitons and Fractals, 2000(11): 115
[323] A A Belov and K D Chaltikian. Phys Lett B, 1993(309): 268
[324] M Blaszak and K Marciniak. J Math Phys, 1994(35): 4661
[325] X B Hu et al. J. Math Phys, 1999(40): 2001
[326] W X Ma et al. J. Math Phys, 1999(40): 6072
[327] H W Zhang et al. J. Math Phys, 1991(32): 1908
[328] W X Ma and B Fuchssteiner. J Math Phys, 1999(40): 2400
[329] X B Hu and P A Clarkson. In: Symmetries and Integrablity of Difference Equations, Eds P A Clarson and F W Nijhoff, Cambridge Univ. Press, 1990, pp. 15
[330] W K Schief. In: Symmetries and Integrablity of Difference Equations, Eds P A Clarson and F W Nijhoff, Cambridge Univ. Press, 1990, pp. 137
[331] X B Hu et al. J Soc Jpn, 2000(69): 1042
[332] M J Ablowitz and J F Laďik. J Math Phys, 1976(17): 1011
[333] T Tsuchida et al. J Phys A, 1999(32): 2239
[334] T T Truong. J Phys A, 1994(27): 3829
[335] V K Dobrev. J Phys A, 1997(30): 1161
[336] M S Tu et al. Lett Math Phys, 1999(49): 33
[337] L Haine and P Lliev. J Phys, A, 1997(30): 7217
[338] J Mass and M Seco. J Math Phys, 1996(37): 6510
[339] 李志斌, 姚偌霞. 物理学报, 2001(50): 2062
[340] E G Fan. Z Naturforsch A, 2001(56): 312
[341] E G Fan. Phys Lett A, 2001(282): 18
[342] E Belokolos, A Bobenko, V Enol'skij, A, Its and V Matveev. Algebro-Geometrical Approach to Nonlinear Integrable Equations, Berlin: Springer-Verlag, 1994
[343] P L Christiansen, J C Eilbrck, V Z Enolskii and N A Kostov. Proc R Soc London, Ser A, 1995(451): 685
[344] A M Samsonov. Appl Anal, 1995(57): 85
[345] A V Porubov and D F Paeker. Wave Motion, 1999(29): 97
[346] S K Liu, Z T Fu, S D Liu and Q Zhao. Phys Lett A, 2001(289): 69
[347] Z T Fu, S K Liu, S D Liu and Q Zhao. Phys Lett A, 2001(290): 72
[348] E G Fan and Y C Hon. Phys Lett A, 2002(292): 335
[349] K Konno and Y H Ichikawa. J Phys Soc Jpn, 1974(37): 1631
[350] J F Zhang. Int J Theor Phys, 1998(37): 1541
[351] M Ito. J Phys Soc Jpn, 1980(49): 771
[352] D J Kaup. Prog Theor Phys, 1975(54): 396

[353] M Yoshimasa. J Math Phys J Math Phys, 2001(42): 1744
[354] Z Jiang. Inverse Probl, 1989(4): 349
[355] R Hirota. J Math Phys, 1973(14): 805
[356] M Lakshmanan and P Kaliappan. J Math Phys. 1983(24): 795
[357] M L Chan and K S Li. J Math Phys, 1989(30): 359
[358] T Brugarino. J Math Phys, 1989(30): 1013
[359] J N Alini. Phys Lett, A, 1987(125): 456
[360] S Y Lou and H Y Ruan. Acta Phys Sin, 1992(41): 182
[361] R H J Grimshaw. Proc R Soc A, 1979(368): 359
[362] N Nirmala and M. J Vedan. J Math Phys, 1986(27): 2640
[363] N Nirmala and M. J. Vedan. J Math Phys, 1986(27): 2644
[364] W Hong and Y D Jung. Phys Lett A, 1999(251): 149
[365] G Z Tu and D Z Meng. Acta Math Appl Sin, 1989(5): 89
[366] 马文秀. 数学年刊, 1992(13): 115
[367] S Y Lou and X B HU. Commun Theor Phys, 1998(29): 145
[368] Z Y Yan and H Q Zhang. J Phys, A, 2001(34): 1785
[369] J P Ying. Commun Theor Phys, 2001(35): 405
[370] Z J Yang. Int J Theor Phys, 1995(34): 589
[371] R Conte and M Musette. J Phys A, 1992(25): 5609
[372] R Radha, M Lakshmanan. Phys Lett A, 1995(179): 7
[373] G M Webb, G P Zank. Phys Lett A, 1990(150): 14
[374] S Y Lou. J Phys A, 1995(28): 7227
[375] A M Wazwaz. Chaos. Soliton and Fractals, 2002(13): 161
[376] J Atai and B A Malomed. Phys Lett A, 1998(246): 412
[377] m A Allen and G Rowlands. Phys Lett A, 1997(235): 145